



Institut de Recherche Mathématique Avancée - UMR 7501

Unité de recherche commune à l'Université de Strasbourg et au CNRS

MEMOIRE

*Contribution aux méthodes numériques pour la simulation
d'écoulements de fluides, d'électromagnétisme et de
physique des plasmas*

présenté dans le cadre de l'école doctorale Mathématiques, Sciences de l'Information
et de l'Ingénieur pour l'obtention
de l'Habilitation à Diriger des Recherches
Université de Strasbourg

Stéphanie SALMON

Remerciements

Tout d'abord, la première partie des travaux exposés ici ne doivent leur existence qu'à François Dubois, à l'origine de cette idée sur laquelle j'ai travaillé pendant 12 ans ! Qu'il soit ici remercié de m'avoir fourni de quoi réfléchir sans jamais m'ennuyer et aussi de m'avoir beaucoup appris !

La deuxième partie de ce manuscrit porte sur une thématique différente qui est celle d'Eric Sonnendrücker. Je tiens à le remercier chaleureusement de m'avoir acceptée dans son équipe, de m'avoir accordé sa confiance en me demandant de co-encadrer des doctorants avec lui et de m'avoir guidée jusqu'ici.

Je remercie mes rapporteurs Mme Christine Bernardi, M. Patrick Ciarlet et M. Jan Dusek de m'avoir fait l'honneur de relire ce travail.

Je remercie également M. Mohammed Lemou et M. Michel Salaün d'avoir accepté de faire le voyage jusqu'à Strasbourg pour faire partie de ce jury et enfin merci à M. Philippe Helluy, garant de cette habilitation.

Mon travail est avant tout un travail d'équipe, il ne serait donc pas tel qu'il est s'il n'y avait pas eu Michel Salaün, à mes côtés depuis le tout début de ma thèse jusqu'à cette habilitation dont il a relu la première partie avec un soin immense. Un grand merci Michel pour ton travail et ton amitié ! La deuxième partie de ce manuscrit porte sur des travaux en collaboration avec Nicolas Crouseilles, Martin Campos-Pinto, Sébastien Jund et Eric Sonnendrücker. Qu'ils soient ici remerciés et qu'ils sachent combien j'apprécie de travailler avec eux.

Je profite de cette occasion pour remercier Vincent Israël-Jost et Olivier Génevaux avec qui j'ai travaillé pendant leur thèse sur des sujets un peu plus éloignés de mes thématiques habituelles mais aussi intéressants l'un que l'autre. Je tiens aussi à remercier Toufic Abboud, François-Xavier Roux, Frédéric Magoulès, Marc Thiriet, Jean-Frédéric Gerbeau et toute l'équipe du projet GAMMA de l'INRIA dont en particulier Pascal Frey avec qui j'ai travaillé, comme l'atteste en général un papier en commun.

Enfin, c'est un bonheur de travailler dans un environnement aussi sympathique et aussi stimulant que l'IRMA. Merci à vous tous et en particulier à Vincent Vigon, mon co-bureau qui me supporte tous les jours, à Claudine Orphanidès et à Josiane Moreau qui m'ont aidé à gérer les problèmes de cette soutenance et à Yvonne Borell qui va devoir comme d'habitude travailler vite car je ne lui aurais pas donné mon mémoire à temps . . .

*Une pensée pour Lucas, mon deuxième fils
dont la naissance a précédé de quelques mois
l'écriture difficile de ce manuscrit !*

Ce mémoire est dédié à ma mère.

Table des matières

I	7
1 Introduction	9
1.1 Motivation physique et mathématique	10
1.2 Espaces fonctionnels et notations	13
2 Formulation classique en (ψ, ω)	15
2.1 Obtention de la formulation	15
2.2 Méthode d'éléments finis	17
2.3 Non stabilité	17
3 Formulation bien posée en (ψ, ω)	21
3.1 Le nouvel espace des tourbillons	21
3.1.1 Propriétés de l'espace $M(\Omega)$	21
3.2 Discrétisation du nouvel espace des tourbillons	23
3.3 Résultat de convergence	24
3.3.1 Méthode préliminaire	24
3.3.2 Méthode intégrale	28
4 Une première formulation en (ω, u, p)	33
4.1 Obtention de la formulation	33
4.2 Problème discret et résultats numériques	35
4.2.1 Espaces discrets	35
4.2.2 Formulation variationnelle discrète	36
4.2.3 Conditions inf-sup discrètes	37
4.2.4 Résultat de convergence	38
4.2.5 Résultats numériques	39
4.3 Equivalence avec la formulation (ψ, ω)	41
4.4 Existence et unicité d'une solution au problème continu en (ω, u, p)	45
5 Formulation bien posée en (ω, u, p)	49
5.1 Le nouvel espace des tourbillons	49
5.2 Forme abstraite du problème de Stokes	51
5.3 Caractère bien posé du problème continu en 2D	52
5.4 Convergence du problème discret 2D	54
5.4.1 Conditions inf-sup discrètes	55
5.4.2 Convergence en 2D	55
5.4.3 Résultats numériques	56

6	Extension au 3D et conclusion	59
6.1	Représentation de champs de vecteurs	60
6.2	Le problème de l'ellipticité	63
6.3	Conclusion	65
6.3.1	En 2d	65
6.3.2	En 3d	66
II		67
7	Introduction	69
8	Les équations de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell	75
8.1	Les équations de Maxwell	75
8.1.1	En 3D	76
8.1.2	En 2D	78
8.1.3	Conservation de la charge	79
8.1.4	Existence de solutions aux équations de Maxwell	80
8.2	Du système de Vlasov-Maxwell au système de Vlasov-Poisson	80
8.3	Conservation de la charge	82
8.3.1	Propriétés géométriques des équations de Maxwell	82
9	Maillage mobile pour le problème de Vlasov	85
9.1	Principe de la méthode	85
9.1.1	Méthode semi-lagrangienne	85
9.1.2	Maillage mobile	86
9.2	Application à un problème d'interaction laser-plasma	87
9.3	Application à LOSS	91
10	Résolution du problème de Vlasov-Maxwell	95
10.1	Solveur PIC	95
10.1.1	L'algorithme PIC	96
10.2	Discrétisation éléments finis des équations de Maxwell	98
10.2.1	Formulation variationnelle	98
10.2.2	Choix des espaces d'éléments finis	99
10.2.3	Discrétisations en temps	104
10.3	Le problème de conservation de la charge	105
10.4	Conclusion et perspectives	107
III		109

Introduction

Le manuscrit comporte trois parties distinctes, la première concerne mes travaux de thèse et ceux en lien avec celle-ci sur la simulation numérique d'écoulements de fluides. La deuxième partie est le travail de recherche mené depuis mon installation dans l'équipe "Equations aux Dérivées Partielles et Théorie du Contrôle" de l'IRMA. Elle porte sur les équations de l'électromagnétisme et leur couplage avec les équations cinétiques de Vlasov dans le cadre de simulations numériques en physique des plasmas. La dernière partie évoque rapidement des travaux qui ont donné lieu à des publications mais qui ne rentrent pas complètement dans un des deux cadres abordés précédemment.

Première partie

Chapitre 1

Introduction

Dans la première partie de ce manuscrit, on s'intéresse au problème de la simulation numérique d'écoulements de fluides incompressibles régis par les équations de Navier-Stokes. Plus particulièrement, on va considérer le problème de Stokes qui traduit l'écoulement d'un fluide incompressible à nombre de Reynolds petit, c'est-à-dire un écoulement à basse vitesse ou l'écoulement d'un fluide très visqueux, deux cas qui permettent de négliger les termes non linéaires de convection apparaissant dans les équations de Navier-Stokes (voir [LL71]).

Mathématiquement, il est important de savoir résoudre le problème de Stokes car dans certains algorithmes de résolution de l'équation de Navier-Stokes, chaque pas de temps nécessite la résolution de ce problème de Stokes ([GR86]).

Il existe plusieurs formulations du problème de Stokes qui présentent chacune leurs avantages et leurs inconvénients à la fois pour la théorie et pour la résolution numérique. La première est dite **en variables primales** et fait intervenir le vecteur **vitesse**, noté \mathbf{u} , et la variable scalaire de **pression**, notée p , variables les plus naturelles pour caractériser un fluide. La première équation traduit le mouvement du fluide soumis à un champ de forces appliquées \mathbf{f} :

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}.$$

Le paramètre (positif) ν est appelé viscosité cinématique et est caractéristique du fluide considéré, \mathbf{f} le champ de forces est souvent réduit à la seule gravité qui s'exerce sur le fluide. La deuxième équation qui traduit le caractère incompressible du fluide s'écrit :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Cette formulation sera désignée dans ce manuscrit soit par le terme de formulation primale soit par celui de formulation (u, p) .

La deuxième formulation du problème de Stokes fait intervenir le **tourbillon**, défini comme étant le rotationnel de la vitesse et noté ω , et la **fonction courant**, notée ψ , dont le rotationnel est justement la vitesse. Dans toute la suite on y fera référence comme la formulation en fonction courant-tourbillon ou en abrégé formulation (ψ, ω) du problème de Stokes.

La dernière formulation, plus récente car étudiée par François Dubois en 1992 [Dub92] est une formulation mêlant variables primales et tourbillon, donc **tourbillon-vitesse-pression**, on l'appellera formulation (ω, u, p) . Cette nouvelle formulation est le sujet d'étude de cette partie de manuscrit mais il a été nécessaire pour bien la comprendre de revenir sur la formulation

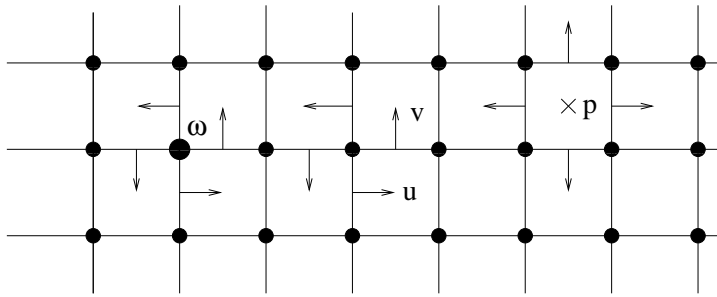


FIG. 1.1 – Discrétisation HAWAY sur un maillage cartésien.

classique (ψ, ω) , qui présente, comme on le verra, de forts liens avec la formulation (ω, u, p) et dont la maîtrise est nécessaire pour appréhender la nouvelle formulation.

Nous allons donc dans cette première partie de manuscrit essayer de dresser un bilan quasi exhaustif de tout ce que l'on sait sur les formulations (ψ, ω) et (ω, u, p) .

1.1 Motivation physique et mathématique

Une méthode éprouvée pour résoudre les équations complètes de Navier-Stokes sur des maillages quadrangulaires quasi réguliers est la méthode que nous avons surnommée HAWAY (connue sous le nom de méthode Marker And Cell -MAC- de Harlow and Welch [HW65] en mécanique des fluides, ou de grille C d'Arakawa en météorologie [Ara66] ou encore de maillages décalés pour les équations de Maxwell [Yee66]). En particulier, cette méthode HAWAY est maintenant une méthode basique pour simuler des mouvements réalistes de fluides dans la communauté d'informatique graphique, voir par exemple [GHD03]. Elle est aussi utilisée dans nombre de codes industriels (Flow3d de Harper, Hirt et Sicilian [HHS83], Phoenix de Patankar et Spalding [PS72], Fluent [S.A], StarCD [Ltd] *etc*). La composante horizontale de la vitesse est discrétisée à l'aide de ses flux au travers des côtés verticaux de la maille, la composante verticale par ses flux au travers des côtés horizontaux de la maille et la pression est constante par maille (cf fig.1.1). Le tourbillon est alors naturellement défini aux sommets de la grille à partir des flux de vitesse normale tournant autour de chaque sommet (fig. 1.3). Pour l'analyse de cette méthode voir [Nic91], [Gir76], [GL96]. L'idée est ici d'étendre cette méthode aux maillages triangulaires non structurés. Pour cela, F. Dubois a introduit en 1992 une formulation à trois champs (tourbillon, vitesse et pression) qui utilise exactement les mêmes degrés de liberté que la méthode HAWAY (voir Fig. 1.1 et 1.2).

L'avantage majeur de la formulation en (u, p) est sa facilité d'implémentation pour des géométries quelconques. Elle demande néanmoins de prendre en compte de façon rigoureuse la condition inf-sup qui pour être vérifiée nécessite que les espaces de discrétisation pour la vitesse d'une part et pour la pression d'autre part soient compatibles et donc correctement choisis ([GR86] et références incluses). Par contre l'inconvénient est que la vitesse dans ce cas n'est pas à divergence exactement nulle.

La formulation (ψ, ω) est justement une réponse à cet inconvénient. La vitesse est ici cherchée sous la forme du rotationnel de la fonction courant $\mathbf{u} = \mathbf{rot} \psi$, donc forcément à divergence

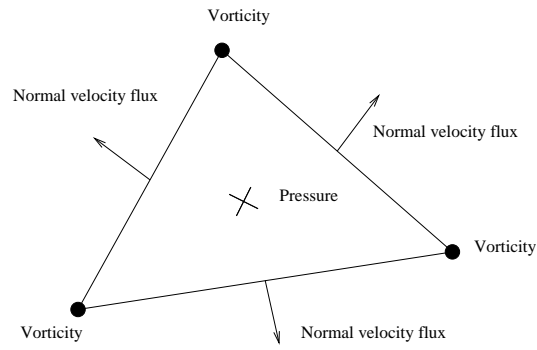


FIG. 1.2 – Degrés de liberté sur un maillage triangulaire.

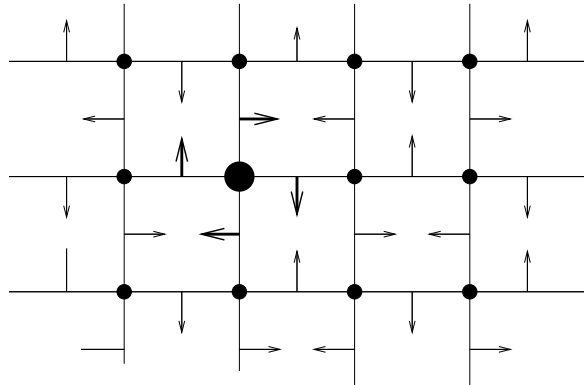


FIG. 1.3 – Discrétisation du tourbillon.

nulle après discrétisation. La difficulté est ici la prise en compte des conditions limites. De plus la fonction courant n'est pas toujours définie même en deux dimensions, par exemple dans les problèmes de puits et source. Le problème de l'existence de la fonction courant est encore plus difficile en trois dimensions ([DP86], [DD86], [Rou84]). De plus, alors que la formulation (u, p) ne fait intervenir que quatre champs, la formulation (ψ, ω) revient à en calculer au minimum six (trois pour le tourbillon et trois pour la fonction courant). Enfin, dans la formulation (ψ, ω) , la pression est obtenue par un post-traitement du tourbillon, ce qui rajoute deux problèmes :

- (i) si le tourbillon est mal calculé, l'erreur se répercutera sur le calcul de la pression,
- (ii) les conditions limites à imposer sur la pression ne sont pas naturelles.

La formulation tourbillon-vitesse-pression est alors un outil mathématique pour généraliser la méthode MAC à des grilles complexes triangulaires. Elle est valable en trois dimensions, permet d'obtenir une divergence de la vitesse exactement nulle et les conditions limites qui en découlent sont naturelles et très générales.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la formulation fonction courant-tourbillon. En effet, cette forme du problème de Stokes bidimensionnel pourtant utilisé numériquement depuis longtemps possède un défaut bien connu important, à savoir qu'il est mathématiquement mal posé (au sens où il ne possède pas forcément une solution unique et continuellement dépendante des données) lorsque l'on cherche le tourbillon dans l'espace de Sobolev H^1 car son gradient n'est alors pas contrôlé. Ces résultats et les conséquences numériques que cela occasionne (résultats numériques non satisfaisants sur des maillages non structurés) sont rappelés dans le deuxième chapitre de ce manuscrit. Dans le troisième chapitre, on rappelle qu'il existe une formulation bien posée du problème de Stokes en fonction courant-tourbillon et on introduit la méthode numérique associée à cette formulation qui permet d'obtenir enfin des résultats numériques très satisfaisants sur des maillages non structurés. On résout ainsi l'instabilité de la formulation fonction courant-tourbillon et on améliore les précédents résultats de convergence connus de cette formulation. En particulier, on démontre alors que le tourbillon converge en moyenne quadratique avec une erreur d'ordre au moins un (contre un-demi avant) par rapport au pas du maillage.

Dans un deuxième temps, on s'intéresse à la formulation tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes. On rappelle son obtention et les premiers résultats connus de cette formulation. Par exemple, alors que les résultats numériques obtenus sur des maillages réguliers sont satisfaisants, ceux sur des maillages non structurés ne le sont pas. Il s'est avéré lors de l'étude théorique que ce problème est un problème de stabilité, équivalent à celui rencontré dans la formulation fonction courant-tourbillon. En fait, le tourbillon n'est pas cherché dans le bon espace, il est cherché plus régulier qu'il ne peut l'être. On montre alors théoriquement et numériquement que la formulation tourbillon-vitesse-pression est une généralisation de la formulation fonction courant-tourbillon permettant la prise en compte de conditions limites plus générales. Les résultats obtenus dans le troisième chapitre de ce manuscrit au sujet de la formulation fonction courant-tourbillon sont ensuite exploités dans le cinquième chapitre pour obtenir des résultats théoriques et numériques très satisfaisants de la formulation tourbillon-vitesse-pression bidimensionnelle sur des maillages non structurés. Le sixième chapitre permet de redéfinir une formulation tourbillon-vitesse-pression tri-dimensionnelle bien posée dans un nouvel espace pour le tourbillon. On démontre aussi théoriquement que ce nouvel espace est bien celui introduit en 2D, ce qui est confirmé par les résultats numériques précédemment cités.

1.2 Espaces fonctionnels et notations

On note Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 suffisamment régulier. Sa frontière $\partial\Omega$ est alors régulière et est notée Γ , la normale extérieure à cette frontière \mathbf{n} , le vecteur tangent \mathbf{t} , la base (\mathbf{n}, \mathbf{t}) étant directe. $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, de Ω dans \mathbb{R} , à support compact. $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable. On note $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de u par rapport à x_i . Pour tout entier $m \geq 0$ et tout réel p tel que $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions $v \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\frac{\partial^\alpha v}{\partial x_i}$ (au sens des distributions), avec $|\alpha| \leq m$, appartiennent à $L^p(\Omega)$. En particulier,

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) , \forall i \in \{1, 2\} , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$\text{et } H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) , \forall i \in \{1, 2\} , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in H^1(\Omega) \right\}.$$

On note $\|\bullet\|_{j,\Omega}$ (respectivement $|\bullet|_{j,\Omega}$) les normes (respectivement les semi-normes) dans les espaces de Sobolev $H^j(\Omega) = W^{j,2}(\Omega)$, $j = 1, 2$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ (respectivement $H_0^2(\Omega)$) est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans la norme $\|\bullet\|_{1,\Omega}$ (respectivement $\|\bullet\|_{2,\Omega}$). On réfère à Adams [Ada75] pour la théorie sur les espaces de Sobolev.

Dans toute la suite, on notera (\bullet, \bullet) les produits scalaires, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ les produits de dualité sur le domaine et $\langle \bullet, \bullet \rangle_\Gamma$ ceux au bord du domaine. On définit formellement les deux rotationnels en dimension deux :

- le rotationnel vecteur, noté **rot**, qui s'applique sur les fonctions scalaires :

$$\mathbf{rot} \omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

- le rotationnel scalaire, noté **rot**, qui s'applique sur les vecteurs :

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \text{ pour tout } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

On définit ensuite l'espace fonctionnel suivant :

$$H(\text{div}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 / \text{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme $\|\mathbf{v}\|_{\text{div}, \Omega} = \sqrt{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2}$.

Les travaux présentés dans cette partie correspondent à mon travail de thèse (1996-1999) et aux articles connexes suivants. Les premiers chapitres n'abordent que les problèmes bidimensionnels, le 3D n'est traité qu'au dernier chapitre.

- S. Salmon,
Développement numérique de la formulation tourbillon-vitesse-pressure pour le problème de Stokes,
Thèse de l'Université Paris VI, 1999.
- [DSS02] F. Dubois, M. Salaün, S. Salmon,
Discrete harmonics for stream function-vorticity Stokes problem,
Numerische Mathematik, Volume 92 Issue 4 (2002), pp 711-742.
- [DSS03a] F. Dubois, M. Salaün, S. Salmon,
First vorticity-velocity-pressure numerical scheme for the Stokes problem,
Computer methods in applied mechanics and engineering, Volume 192 (2003), pp 4877-4907.
- [DSS03b] F. Dubois, M. Salaün, S. Salmon,
Vorticity-velocity-pressure and stream function-vorticity formulations for the Stokes problem,
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Volume 82 (2003), pp 1395-1451.
- [ASS04] T. Abboud, M. Salaün, S. Salmon,
Coupling harmonic functions-finite elements for solving stream function-vorticity Stokes problem.
Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume 20 (2004), Issue 5, pp 765 - 788.
- [SS07b] M. Salaün, S. Salmon,
Numerical stabilization of the Stokes problem in vorticity-velocity-pressure formulation,
Computer methods in applied mechanics and engineering, Volume 196 (2007), Issues 9-12, pp 1767-1786.
- [SS07a] M. Salaün, S. Salmon,
Numerical analysis of the well-posed vorticity-velocity-pressure formulation of the bidimensional Stokes problem, soumis à *SINUM*, 2007.

Chapitre 2

Formulation classique en (ψ, ω)

On présente ici la formulation classique en fonction courant-tourbillon (encore appelée en abrégé formulation (ψ, ω)) du problème de Stokes. On rappelle des résultats bien connus : la formulation elle-même et son obtention, le problème d'existence et d'unicité de solution et les résultats de convergence afin de bien montrer les difficultés.

Dans toute la suite, on note Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 suffisamment régulier. Dès que ce sera nécessaire, on ajoutera des hypothèses sur Ω et on précisera sa régularité. On note \mathbf{n} la normale unitaire extérieure à cette frontière (qui existe car la frontière du domaine est suffisamment régulière).

2.1 Obtention de la formulation

On se place donc dans Ω ouvert borné de \mathbb{R}^2 **simplement connexe** et de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ (elle est alors **connexe**). Soit (\mathbf{u}, p) la vitesse et la pression d'un fluide incompressible de viscosité cinématique notée ν . Le problème de Stokes stationnaire en variables primales, qui caractérise ce fluide, avec une condition limite homogène sur la vitesse et un second membre \mathbf{f} dans $(L^2(\Omega))^2$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.1)$$

Comme \mathbf{u} est à divergence nulle et nul sur le bord du domaine que l'on a supposé connexe, on sait qu'il peut s'écrire comme le rotationnel d'une fonction courant notée ψ qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ [GR86] soit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot} \psi \text{ dans } \Omega.$$

La condition limite $\mathbf{u} = 0$ sur Γ se traduit alors sur la fonction courant par les conditions limites suivantes :

$$\psi = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (2.3)$$

N.B. : L'existence de la fonction courant est intrinsèquement liée aux hypothèses faites sur le domaine et sa frontière. Par exemple, si la frontière a plusieurs composantes connexes

sur lesquelles le flux de vitesse normale n'est pas à moyenne nulle sur chacune des composantes, la vitesse (pourtant à divergence nulle) ne peut être représentée sous la forme d'un rotationnel (voir [FT78] et un exemple en figure 2.1).

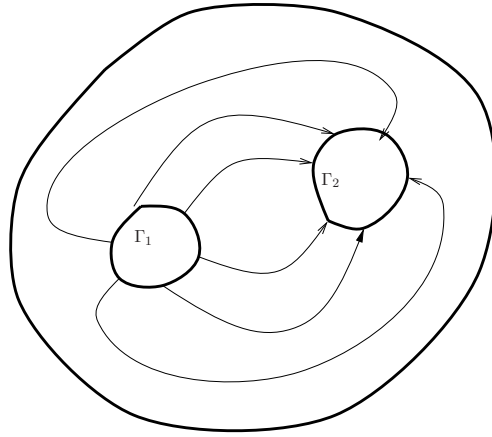


FIG. 2.1 – Un champ de vitesse à divergence nulle tel que $\int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dx = 1$ et $\int_{\Gamma_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dx = -1$ pour lequel il n'existe pas de fonction courant.

On introduit ensuite la vorticité (ou tourbillon) :

$$\omega = \mathbf{rot} \, \mathbf{u} \text{ dans } \Omega,$$

d'où $\omega = \mathbf{rot} \, \mathbf{rot} \, \psi = -\Delta \psi$. Comme $-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{rot} \, \mathbf{rot} \, \mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div}) \, \mathbf{u} = \mathbf{rot} \, \omega$ car \mathbf{u} est à divergence nulle, l'équation du mouvement s'écrit donc $\nu \mathbf{rot} \, \omega + \nabla p = \mathbf{f}$. On en prend alors le rotationnel, ce qui fait disparaître la pression et donne :

$$-\nu \Delta \omega = \mathbf{rot} \, \mathbf{f}. \quad (2.4)$$

$$-\Delta \psi = \omega. \quad (2.5)$$

Le problème de Stokes stationnaire s'écrit donc très simplement comme deux problèmes de Laplacien couplés, à fonction inconnue scalaire, d'où sa grande popularité. Le deuxième avantage de cette formulation fonction courant-tourbillon est d'assurer parfaitement la condition d'incompressibilité : la vitesse étant cherchée sous la forme d'un rotationnel, sa divergence est exactement nulle.

On note cependant que le problème de laplacien sur le tourbillon ne comporte aucune condition limite alors que celui sur la fonction courant est sur-déterminé. On reparlera un peu plus loin de cette difficulté inhérente à cette formulation.

On obtient la formulation variationnelle en fonction courant-tourbillon classique en multipliant l'équation (2.4) par une fonction scalaire $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et la deuxième (2.5) par une fonction $\mu \in H^1(\Omega)$, et en intégrant par parties, ce qui donne : chercher un couple $\psi \in H_0^1(\Omega)$ et $\omega \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \nu(\nabla \omega, \nabla \varphi) = \langle \mathbf{rot} \, \mathbf{f}, \varphi \rangle_{-1,1} = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \, \varphi), \quad (2.6)$$

$$\forall \mu \in H^1(\Omega), (\nabla \psi, \nabla \mu) = (\omega, \mu). \quad (2.7)$$

Les intégrations par parties prennent en compte les conditions limites sur ψ .

2.2 Méthode d'éléments finis

Il est alors naturel de discrétiser le problème (2.6)-(2.7) par une méthode d'éléments finis linéaires et continus. Pour cela, on suppose que le domaine Ω est polygonal, ce qui permet de le recouvrir entièrement à l'aide d'un maillage \mathcal{T} composée de triangles non dégénérés (cette hypothèse permet de ne pas avoir à traiter l'erreur de géométrie lors de l'étude de convergence de la méthode). Dans toute la suite, on notera $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des triangles de la triangulation \mathcal{T} .

De plus, comme pour toute étude d'erreur de méthode d'éléments finis, on supposera que le maillage appartient à une famille régulière de triangulations [Cia78]. L'ensemble $H_{\mathcal{T}}^1$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, polynomiales de degré 1 dans chaque triangle de \mathcal{T} et $H_{0,\mathcal{T}}^1 = H_{\mathcal{T}}^1 \cap H_0^1(\Omega)$:

$$H_{\mathcal{T}}^1 = \{ \varphi \in C^0(\overline{\Omega}), \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}, \varphi|_K \in \mathbb{P}^1(K) \}, \quad (2.8)$$

où \mathbb{P}^1 est l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à 1.

La discrétisation du problème (2.6)-(2.7) consiste alors à trouver $\psi_{\mathcal{T}} \in H_{0,\mathcal{T}}^1$ et $\omega_{\mathcal{T}} \in H_{\mathcal{T}}^1$ tels que :

$$\forall \varphi \in H_{0,\mathcal{T}}^1 \quad \nu(\nabla \omega_{\mathcal{T}}, \nabla \varphi) = (\mathbf{f}, \text{rot } \varphi) \quad (2.9)$$

$$\forall \mu \in H_{\mathcal{T}}^1 \quad (\nabla \psi_{\mathcal{T}}, \nabla \mu) = (\omega_{\mathcal{T}}, \mu). \quad (2.10)$$

Cette formulation (2.9)-(2.10) a beaucoup été étudiée et ce depuis longtemps (Ciarlet-Raviart [CR74], Glowinski-Pironneau [GP79], Girault-Raviart [GR86] entre autres) mais elle présente malgré sa simplicité apparente un certain nombre de difficultés.

2.3 Non stabilité

Tout d'abord, il est facile de voir que (2.6)-(2.7) est mal posé (voir par exemple [GR86]). On peut vérifier que toute solution du problème (2.6)-(2.7) est solution du problème de Stokes mais l'inverse n'est pas vrai. Car même si $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, le tourbillon n'a aucune raison d'être dans $H^1(\Omega)$, il est en général moins régulier. En effet, le problème de Stokes peut être vu comme un problème biharmonique pour la fonction courant :

$$(\Delta \psi, \Delta \mu) = (\mathbf{f}, \text{rot } \mu) \quad \forall \mu \in H_0^2(\Omega). \quad (2.11)$$

Ce problème est bien posé dans $H_0^2(\Omega)$ (voir [Cia78] par exemple) et comme $\omega = -\Delta \psi$, le tourbillon ne peut pas être plus régulier que de carré sommable.

La deuxième difficulté de la formulation fonction courant-tourbillon a déjà été soulevée à savoir le manque de conditions limites sur le tourbillon et la sur-détermination pour la

fonction courant. La conséquence est alors que si l'on cherche à démontrer une stabilité du schéma, on ne peut pas contrôler l'énergie du tourbillon. En effet, pour cela il faudrait pouvoir prendre $\varphi = \omega$ dans la première équation (2.6) mais ce n'est pas possible car ω ne vérifie pas les conditions limites adéquates. Le rotationnel de ω n'est donc pas borné dans $(L^2(\Omega))^2$.

Pour conclure, il n'y a pas toujours existence d'une solution à ce problème de Stokes en formulation (ψ, ω) et il n'est donc pas équivalent au problème de Stokes en variables primales puisque lui par contre est bien posé. Précisons néanmoins que si une solution existe, elle est unique.

Ces difficultés inhérentes à cette formulation se retrouvent alors dans les résultats numériques. Alors que ceux-ci sont satisfaisants sur des maillages réguliers (pour plus de détails sur les résultats numériques, voir [Sal99]), ils ne le sont pas sur des maillages non structurés. En effet, comme nous allons le voir sur un cas test analytique, les valeurs du tourbillon sur le bord non seulement ne sont pas celles attendues mais explosent avec le raffinement du maillage.

On s'intéresse en particulier au cas test analytique de Bercovier-Engelman [BE79]. Sur le carré unité, on cherche (ψ, ω) solution du problème de Stokes avec une condition limite homogène sur le bord Γ et un second membre $f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$ défini par :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 256(x^2(x-1)^2(12y-6) + y(y-1)(2y-1)(12x^2-12x+2)) \\ &\quad + (y-0.5) \\ f_2(x, y) &= -f_1(y, x) \end{aligned}$$

Alors la solution cherchée est la suivante :

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= -128(y^2(y-1)^2x^2(x-1)^2), \\ \omega(x, y) &= 256(y^2(y-1)^2(6x^2-6x+1) + x^2(x-1)^2(6y^2-6y+1)). \end{aligned}$$

On travaille sur un maillage de référence non structuré généré par le mailleur de l'Inria "EMC2" (logiciel Modulef [BGH⁺88]) présenté en figure 2.2.

On présente en Figure 2.3, les valeurs du tourbillon au bord du domaine exactes et calculées. Remarquons que la valeur extrême exacte atteinte sur ce bord est 16.00 et que la valeur calculée la dépasse largement pour atteindre 27.08. Cette erreur en norme L^∞ sur le tourbillon est alors beaucoup trop importante et le problème n'est pas résolu par le raffinement du maillage. En effet, la zone des problèmes au bord diminue bien avec le raffinement du maillage mais la valeur extrême en elle-même continue d'exploser.

La théorie prévoit une convergence de l'erreur en $h_{\mathcal{T}}$ sur la semi-norme H^1 de la fonction courant, donc sur la vitesse en norme L^2 , et en $h_{\mathcal{T}}^{1/2}$ pour la norme L^2 du tourbillon ([Sch78], [GR86]). Sur la courbe de convergence obtenue sur des maillages non structurés et non emboîtés (Figure 2.4), on observe une convergence en $h_{\mathcal{T}}^{1+\eta}$, η positif pour la norme L^2 de la fonction courant et en $h_{\mathcal{T}}^{1/2-\varepsilon}$, ε positif pour la norme L^2 du tourbillon. Sur la norme L^2 de la fonction courant, on aurait pu s'attendre à mieux, sachant que la théorie prévoit $\mathcal{O}(h_{\mathcal{T}})$ pour la semi-norme H^1 que le domaine et la solution sont réguliers, on aurait pu gagner un cran grâce à un argument du type Aubin-Nitsche [Aub67, Nit68] mais les problèmes en fonction courant et tourbillon étant couplés, on voit qu'on ne peut obtenir mieux. De plus, comme attendu par la théorie, on voit que le rotationnel (ou gradient en 2D) en norme L^2 du tourbillon n'est pas borné.

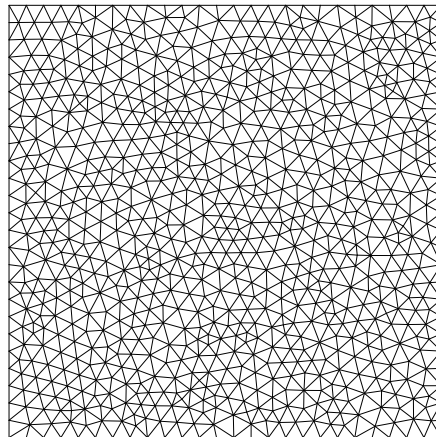


FIG. 2.2 – Maillage non structuré de référence.

Tourbillon au bord

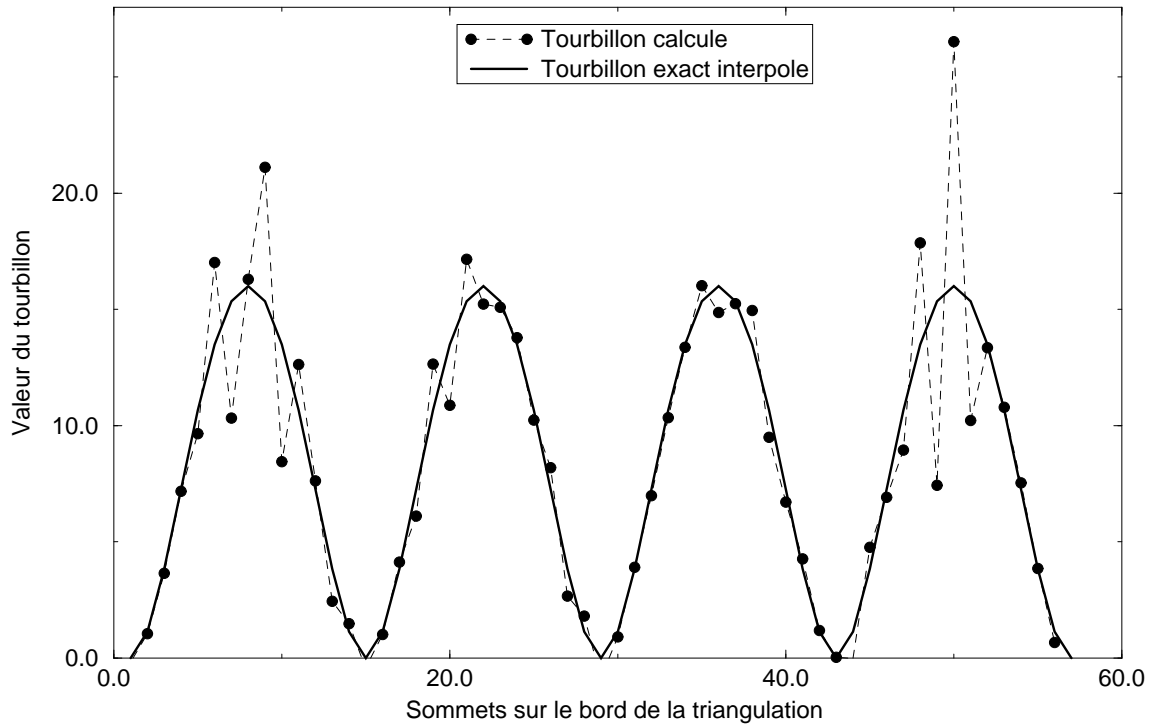


FIG. 2.3 – Valeur du tourbillon sur le bord du domaine.

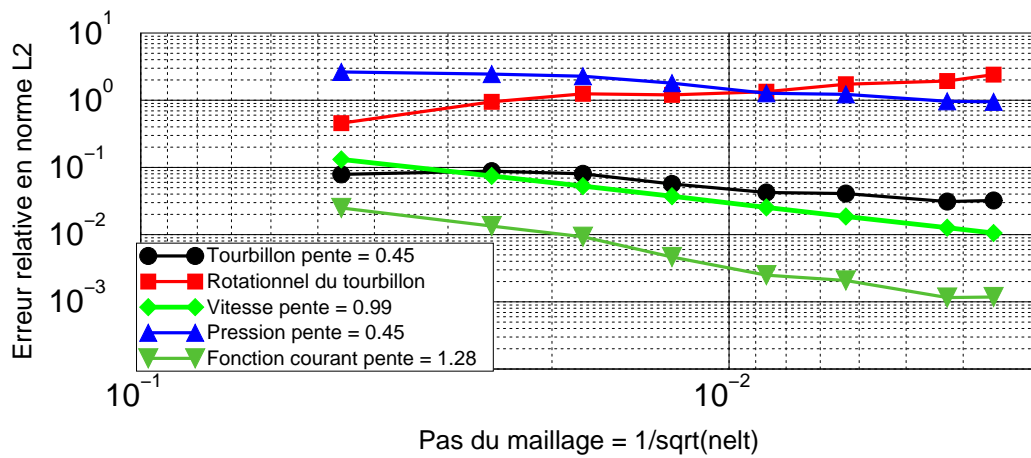


FIG. 2.4 – Ordre de convergence - maillages non structurés - cas test de Bercovier-Engelman.

Chapitre 3

Formulation bien posée en (ψ, ω)

3.1 Le nouvel espace des tourbillons

Il existe cependant une formulation bien posée du problème de Stokes. Pour cela, il faut utiliser pour l'espace des tourbillons, l'espace $M(\Omega)$ suivant, introduit par Ruas [Rua91] et Bernardi-Girault-Maday [BGM92] :

$$M(\Omega) = \{ \varphi \in L^2(\Omega), \Delta\varphi \in H^{-1}(\Omega) \}. \quad (3.1)$$

En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent que le tourbillon ne pouvait pas toujours être dans $H^1(\Omega)$ mais d'après l'équation (2.4), il suffit qu'il soit effectivement à laplacien dans H^{-1} . On affaiblit donc ici la régularité demandée au tourbillon.

La nouvelle formulation variationnelle est désormais obtenue en testant l'équation (2.4) contre des fonctions $\xi \in H_0^1(\Omega)$ et la deuxième (2.5) avec des fonctions φ de $M(\Omega)$. Il faut intégrer deux fois par parties le terme $\langle \Delta\psi, \varphi \rangle_{-1,1}$ pour prendre en compte les conditions limites (2.2) et (2.3).

Le couple (ψ, ω) appartenant à $H_0^1(\Omega) \times M(\Omega)$ est tel que

$$\begin{cases} (\omega, \varphi) + \langle \Delta\varphi, \psi \rangle_{-1,1} = 0 & \forall \varphi \in M(\Omega) \\ \langle -\Delta\omega, \xi \rangle_{-1,1} = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \xi) & \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans la suite, afin d'être auto-consistant, on rappelle les arguments de Bernardi-Girault-Maday [BGM92] qui font de ce problème (3.2) une formulation bien posée du problème de Stokes en (ψ, ω) et en particulier les propriétés de l'espace $M(\Omega)$ nécessaires pour cela, dont on trouvera les démonstrations dans l'article [DSS02].

3.1.1 Propriétés de l'espace $M(\Omega)$

L'espace $M(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\| \varphi \|_M = \sqrt{\| \varphi \|_{0,\Omega}^2 + \| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega}^2}$. Il est non vide car on peut démontrer que l'espace $H^1(\Omega)$ s'y injecte continûment. De plus, pour toute fonction $\varphi \in M(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, sa norme M est égale à sa norme H^1 . On introduit $\mathcal{H}(\Omega)$, le noyau de la forme bilinéaire $\langle \Delta \cdot, \cdot \rangle_{-1,1}$,

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{ \varphi \in M(\Omega), \langle \Delta\varphi, \xi \rangle_{-1,1} = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega) \},$$

et on démontre que $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est autre que l'espace des **fonctions harmoniques**.

La clé de toute cette étude réside dans la proposition suivante de décomposition des fonctions de l'espace $M(\Omega)$ en une fonction régulière nulle au bord et une fonction harmonique qui porte la trace sur le bord de toute la fonction.

Proposition 3.1.1 *Décomposition de $M(\Omega)$.*

$$M(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}(\Omega).$$

On décompose les fonctions de $M(\Omega)$ comme explicité dans la proposition (3.1.1) et on réécrit le problème (3.2) avec $\omega = \omega^0 + \omega^\Delta$ et la fonction test $\varphi = \varphi^0$ ou $\varphi = \varphi^\Delta$ où ω^0 et φ^0 appartiennent à $H_0^1(\Omega)$ et $\omega^\Delta, \varphi^\Delta$ à l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi \in H_0^1(\Omega), \omega^0 \in H_0^1(\Omega), \omega^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega), \\ (\omega^0, \varphi^0) + (\omega^\Delta, \varphi^0) + \langle \Delta \varphi^0, \psi \rangle_{-1,1} & = 0 \quad \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Omega) \\ (\omega^0, \varphi^\Delta) + (\omega^\Delta, \varphi^\Delta) + \langle \Delta \varphi^\Delta, \psi \rangle_{-1,1} & = 0 \quad \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega) \\ \langle -\Delta \omega^0, \xi \rangle_{-1,1} + \langle -\Delta \omega^\Delta, \xi \rangle_{-1,1} & = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \xi) \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Comme les fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont harmoniques, il reste :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi \in H_0^1(\Omega), \omega^0 \in H_0^1(\Omega), \omega^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega), \\ (\omega^0, \varphi^0) + (\omega^\Delta, \varphi^0) + \langle \Delta \varphi^0, \psi \rangle_{-1,1} & = 0 \quad \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Omega) \\ (\omega^0, \varphi^\Delta) + (\omega^\Delta, \varphi^\Delta) & = 0 \quad \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega) \\ \langle -\Delta \omega^0, \xi \rangle_{-1,1} & = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \xi) \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Il est alors évident que le problème précédent peut être résolu de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (c) \text{ Trouver } \omega^0 \in H_0^1(\Omega) & \text{tel que} \\ \langle -\Delta \omega^0, \xi \rangle_{-1,1} & = (\nabla \omega^0, \nabla \xi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \xi) \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \\ (b) \text{ Trouver } \omega^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega) & \text{tel que} \\ (\omega^\Delta, \varphi^\Delta) & = -(\omega^0, \varphi^\Delta) \quad \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega). \\ (a) \text{ Trouver } \psi \in H_0^1(\Omega) & \text{tel que} \\ \langle -\Delta \varphi^0, \psi \rangle_{-1,1} & = (\nabla \psi, \nabla \varphi^0) = (\omega^0 + \omega^\Delta, \varphi^0) \quad \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

La manière d'étudier et de découpler ces problèmes a été introduite par Glowinski, Pironneau [GP79], voir aussi Achdou, Glowinski, Pironneau [AGP92] et Ruas [Rua95]. La formulation bien posée du problème de Stokes en fonction courant-tourbillon s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \omega^0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ (\nabla \omega^0, \nabla \xi) & = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \xi) \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \\ \text{Trouver } \omega^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ tel que} \\ (\omega^\Delta, \varphi) & = -(\omega^0, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}(\Omega). \\ \text{Trouver } \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ (\nabla \psi, \nabla \chi) & = (\omega^0 + \omega^\Delta, \chi) \quad \forall \chi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.3)$$

En étudiant chacun de ces problèmes séparément, on démontre par des arguments classiques la proposition suivante :

Proposition 3.1.2 *Existence et unicité d'une solution au problème (3.2).*

Si $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, le problème (3.2) a une unique solution $(\psi, \omega) \in H_0^1(\Omega) \times M(\Omega)$ qui dépend continûment de la donnée \mathbf{f} :

$$\exists C > 0, \quad \|\omega\|_M + \|\nabla\psi\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} . \quad (3.4)$$

Le problème de Stokes en formulation (ψ, ω) est donc bien posé sous cette forme.

3.2 Discrétisation du nouvel espace des tourbillons

Au vu des résultats non satisfaisants de la formulation fonction courant-tourbillon sur des maillages non structurés, on cherche à les améliorer. On vient de voir qu'il existe une formulation fonction courant-tourbillon bien posée théoriquement. De notre point de vue c'est donc cette formulation qu'il faut utiliser afin de construire une bonne méthode numérique. Là encore, on va s'intéresser à une méthode d'éléments finis qui nous permettra de prendre en compte des maillages non structurés triangulaires. La difficulté réside ici dans la discrétisation de l'espace des tourbillons $M(\Omega)$ bien moins classique que celle de l'espace $H^1(\Omega)$. Mais celui-ci présente le grand avantage de pouvoir être décomposé (voir la proposition 3.1.1) et c'est évidemment la clé qui permet d'obtenir une méthode numérique satisfaisante : il suffira d'avoir le même genre de décomposition au niveau discret. On va commencer par démontrer théoriquement que la méthode numérique qui consiste à chercher le tourbillon dans $M(\Omega)$ va effectivement donner de bons résultats, puis on introduira les méthodes proprement dites qui ont été implémentées. Dans un premier temps nous avons utilisé une méthode coûteuse en temps de calcul basée sur un raffinement homothétique d'un maillage donné pour approcher l'espace des tourbillons et en particulier approcher les fonctions harmoniques qui le composent, avant de développer avec Toufic Abboud une méthode couplant méthode d'éléments finis et méthode intégrale pour calculer de "vraies" fonctions harmoniques.

On rappelle que le domaine Ω est supposé polygonal, ce qui permet de le recouvrir entièrement par des triangles, on appellera \mathcal{T} ce maillage et on suppose qu'il appartient à une famille régulière de triangulations comme défini précédemment. On rappelle que $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ est l'ensemble des triangles de \mathcal{T} .

En s'appuyant sur la décomposition de $M(\Omega)$ (proposition 3.1.1), on introduit un espace de dimension finie $M_{\mathcal{T}}$ inclus dans $M(\Omega)$, où $H_{0,\mathcal{T}}^1 \subset H_0^1(\Omega)$ et est défini dans le chapitre précédent et dans un premier temps, on suppose que l'on peut trouver $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ un espace de fonctions harmoniques de dimension finie. On précisera cet espace $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ par la suite.

Définition 3.2.1 *Discrétisation de $M(\Omega)$.*

On pose :

$$M_{\mathcal{T}} = H_{0,\mathcal{T}}^1 \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} . \quad (3.5)$$

La formulation variationnelle discrète du problème de Stokes (3.3) devient alors :

$$\text{Trouver } \psi_{\mathcal{T}} \in H_{0,\mathcal{T}}^1, \quad \omega_{\mathcal{T}} = \omega_{\mathcal{T}}^0 + \omega_{\mathcal{T}}^{\Delta} \in M_{\mathcal{T}} = H_{0,\mathcal{T}}^1 \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \quad (3.6)$$

$$(\nabla \omega_{\mathcal{T}}^0, \nabla \xi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \xi) \quad \forall \xi \in H_{0,\mathcal{T}}^1 \quad (3.7)$$

$$(\omega_{\mathcal{T}}^\Delta, \varphi) = -(\omega_{\mathcal{T}}^0, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \quad (3.8)$$

$$(\nabla \psi_{\mathcal{T}}, \nabla \chi) = (\omega_{\mathcal{T}}^0 + \omega_{\mathcal{T}}^\Delta, \chi) \quad \forall \chi \in H_{0,\mathcal{T}}^1. \quad (3.9)$$

Proposition 3.2.2 *Existence et unicité d'une solution au problème (3.6)-(3.9).*

Si $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, le problème (3.6)-(3.9) a une unique solution $(\psi_{\mathcal{T}}, \omega_{\mathcal{T}}) \in H_{0,\mathcal{T}}^1 \times M_{\mathcal{T}}$ qui dépend continûment de la donnée \mathbf{f} . Il existe une constante C strictement positive, indépendante du maillage telle que :

$$\|\omega_{\mathcal{T}}\|_M + \|\nabla \psi_{\mathcal{T}}\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}. \quad (3.10)$$

3.3 Résultat de convergence

On peut alors démontrer la proposition suivante avec $\Pi_{\mathcal{T}}$, l'opérateur d'interpolation de Lagrange classique et $\phi_{\mathcal{T}}$ un opérateur d'interpolation dans $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$:

Proposition 3.3.1 *L'erreur est majorée par l'erreur d'interpolation.*

Soient (ψ, ω) la solution de la formulation continue en fonction courant-tourbillon (3.3) et $(\psi_{\mathcal{T}}, \omega_{\mathcal{T}})$ la solution du problème discret associé (3.6)-(3.9). Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de \mathcal{T} telle que :

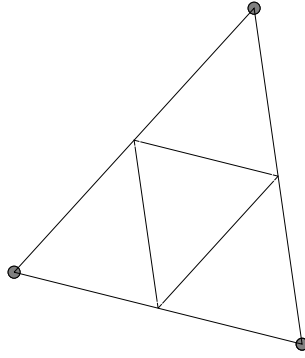
$$\|\omega - \omega_{\mathcal{T}}\|_M + \|\psi - \psi_{\mathcal{T}}\|_{1,\Omega} \leq C (\|\omega^0 - \Pi_{\mathcal{T}}\omega^0\|_M + \|\omega^\Delta - \phi_{\mathcal{T}}\omega^\Delta\|_M + \|\psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi\|_{1,\Omega}).$$

Il est clair maintenant que si on discrétise classiquement la fonction courant et la partie régulière ω^0 par des polynômes de degré 1 par morceaux, on aura une erreur en $\mathcal{O}(h)$ sur $\|\omega^0 - \Pi_{\mathcal{T}}\omega^0\|_M$ et $\|\psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi\|_{1,\Omega}$ (on rappelle que la norme M et la norme H^1 sont équivalentes sur H_0^1). Donc si on est capable d'approcher au moins aussi bien, *i.e.* en $\mathcal{O}(h)$, la partie harmonique du tourbillon, on aura une méthode numérique convergente meilleure que la formulation classique qui ne converge qu'en $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ pour le tourbillon. Tout le travail repose maintenant sur l'approximation numérique de l'espace des fonctions harmoniques, espace que nous avons appelé $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ et sur les résultats d'interpolation que l'on peut y démontrer.

3.3.1 Méthode préliminaire

On s'intéresse à un espace de fonctions, dites harmoniques discrètes mais qui ne sont pas harmoniques, et dont on montre qu'il approche bien $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$. Cet espace permet de construire une méthode numérique préliminaire qui confirme que discrétiser la forme bien posée du problème de Stokes remédie aux problèmes numériques que nous avons rencontrés sur les maillages non structurés.

Cette première méthode que nous avons envisagée pour discrétiser le nouvel espace des tourbillons demande de raffiner homothétiquement le maillage jusqu'à 4 fois. La méthode est complètement développée dans ma thèse [Sal99] et l'article qui a suivi (Dubois, Salaün, Salmon [DSS02]). La méthode intégrale, développée dans la section suivante, qui utilise de "vraies" fonctions harmoniques et non plus des approximations est beaucoup plus intéressante, à la fois en termes de résultat de convergence et en termes de coût de calcul, c'est pourquoi on ne rappelle ici que le résultat final de cette première méthode.

FIG. 3.1 – Division d'un triangle de \mathcal{T}_k .

Fonctions harmoniques discrètes

On définit l'espace $\Gamma_{\mathcal{T}}$ des traces des fonctions de $H_{\mathcal{T}}^1$ sur le bord du maillage. La dimension de $\Gamma_{\mathcal{T}}$ est exactement égale au nombre de sommets du maillage \mathcal{T} sur le bord Γ .

$$\Gamma_{\mathcal{T}} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda : \partial\Omega = \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \lambda \text{ continu sur } \Gamma \\ \lambda \text{ linéaire sur chaque arête du maillage} \end{array} \right\} .$$

Soit $\mathcal{T} \in \mathcal{U}_{\sigma}$ un maillage donné. Alors, on définit récursivement la famille de maillages \mathcal{T}_k ($k \in \mathbb{N}$) comme suit :

- (i) $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$;
- (ii) $\mathcal{T}_{k+1} \subset \mathcal{T}_k$ est obtenu à partir de \mathcal{T}_k en divisant chaque triangle en quatre (voir Figure 3.1).

Définition 3.3.2 Harmoniques discrètes.

On définit l'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ des fonctions harmoniques discrètes par :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T},k} = \left\{ \varphi \in H_{\mathcal{T}_k}^1, \exists \lambda \in \Gamma_{\mathcal{T}} \quad \gamma\varphi = \lambda \text{ on } \Gamma, (\nabla\varphi, \nabla\xi) = 0 \quad \forall \xi \in H_{0,\mathcal{T}_k}^1 \right\} ,$$

et l'opérateur de relèvement Z_k d'ordre k par :

$$Z_k : \Gamma_{\mathcal{T}} \ni \lambda \longmapsto Z_k(\lambda) \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla Z_k(\lambda), \nabla\xi) = 0 \quad \forall \xi \in H_{0,\mathcal{T}_k}^1 \\ \gamma Z_k(\lambda) = \lambda \quad \text{on } \Gamma \end{array} \right. .$$

L'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{H}_{\mathcal{T},k} = \dim \Gamma_{\mathcal{T}}$. Les valeurs nodales sur $\mathcal{T}_k \cap \Gamma$ sont obtenues par interpolation linéaire des valeurs aux sommets du maillage initial $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$. Les valeurs internes de la fonction $Z_k(\lambda)$ sont obtenues par résolution d'un laplacien dans l'espace H_{0,\mathcal{T}_k}^1 avec comme valeurs au bord, celles obtenues par l'étape précédente.

Définition 3.3.3 Formulation en harmoniques discrètes du problème de Stokes.

Pour tout maillage $\mathcal{T} \in \mathcal{U}_{\sigma}$ et tout entier $k \geq 0$, on pose :

$$H_{\mathcal{T}}^{1,k} = H_{0,\mathcal{T}}^1 \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T},k} .$$

La formulation en harmoniques discrètes du problème de Stokes consiste à :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \omega_{\mathcal{T}}^{0,k} \in H_{0,\mathcal{T}}^1 \text{ tel que } & (\nabla \omega_{\mathcal{T}}^{0,k}, \nabla \xi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \xi) & \forall \xi \in H_{0,\mathcal{T}}^1 \\ \text{Trouver } \omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k} \text{ tel que } & (\omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k}, \chi) = -(\omega_{\mathcal{T}}^{0,k}, \chi) & \forall \chi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k} \\ \text{Trouver } \psi_{\mathcal{T},k} \in H_{0,\mathcal{T}}^1 \text{ tel que } & (\nabla \psi_{\mathcal{T},k}, \nabla \xi) = (\omega_{\mathcal{T}}^{0,k} + \omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k}, \xi) & \forall \xi \in H_{0,\mathcal{T}}^1 . \end{aligned}$$

Remarque 3.3.4 Il est clair que $\omega_{\mathcal{T}}^{0,k}$ ne dépend pas de k . Cette formulation coïncide avec (3.3) quand $k = +\infty$, et avec (2.6)-(2.7) quand $k = 0$.

Résultat de convergence

On a alors démontré le résultat de convergence suivant :

Théorème 3.3.5 *Résultat de convergence.*

Le problème (3.3.3) a une unique solution $(\psi_{\mathcal{T},k}, \omega_{\mathcal{T},k}) \in H_{0,\mathcal{T}}^1 \times H_{\mathcal{T}}^{1,k}$. Si (ψ, ω) , appartient à $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H^2(\Omega)$, solution du problème continu (3.1.1), on a :

$$\forall \theta \in]0, 1[, \exists C = C(\theta) > 0 , \forall \mathcal{T} \in \mathcal{U}_\sigma , \exists K(1, \mathcal{T}) , \text{ si } k \geq K(1, \mathcal{T})$$

$$\| \omega - \omega_{\mathcal{T},k} \|_M + \| \psi - \psi_{\mathcal{T},k} \|_{1,\Omega} \leq C h_{\mathcal{T}}^{1-\theta} (\| \omega \|_{2,\Omega} + \| \psi \|_{2,\Omega}) .$$

Ce résultat est non optimal car nous ne pouvons pas montrer une convergence en $\mathcal{O}(h)$ pour la partie harmonique du tourbillon mais seulement $\mathcal{O}(h^{1-\theta})$ avec les fonctions harmoniques discrètes. Notez aussi, l'existence d'un K i.e. d'un nombre de raffinements du maillage pour obtenir la convergence. Ce nombre K n'a pu être évalué que numériquement.

Résultats numériques

On s'intéresse à nouveau au cas test de Bercovier-Engelman [BE79]. Comme K dépend du maillage (voir Théorème 3.3.5), on a travaillé avec 3 maillages différents toujours obtenus par EMC2. On rappelle que des maillages structurés donnent de bons résultats sans stabiliser (voir [DSS98], [GR86]). L'étape la plus longue dans cette méthode est bien sûr la deuxième équation où nous devons calculer les fonctions harmoniques discrètes (autant que d'arêtes du bord de la triangulation initiale) **sur les maillages raffinés**.

On rappelle que le tourbillon atteint son extremum (+16.00) au milieu de chaque arête du carré. On a vu que sans utiliser de fonction harmonique, cette valeur explosait sur le bord du domaine. La Figure 3.2 donne les valeurs du tourbillon le long du bord du domaine calculées sur les différents raffinements d'un maillage. On observe que raffiner 4 fois semble suffisant pour obtenir des résultats satisfaisants.

On rappelle que le problème (2.9)-(2.10) n'est pas stable et que l'ordre de convergence est en $h_{\mathcal{T}}^{1/2}$ pour la norme L^2 du tourbillon et $h_{\mathcal{T}}^{1-\varepsilon}$ pour la norme H^1 de la fonction courant (voir Figure 3.5). Ici, on obtient l'ordre 1 de convergence (voir Théorème 3.3.5). Noter que numériquement, les résultats donnés Figure 3.3 sont meilleurs que ceux attendus : presque $\mathcal{O}(h_{\mathcal{T}}^2)$ pour la norme L^2 du tourbillon et de la fonction courant.

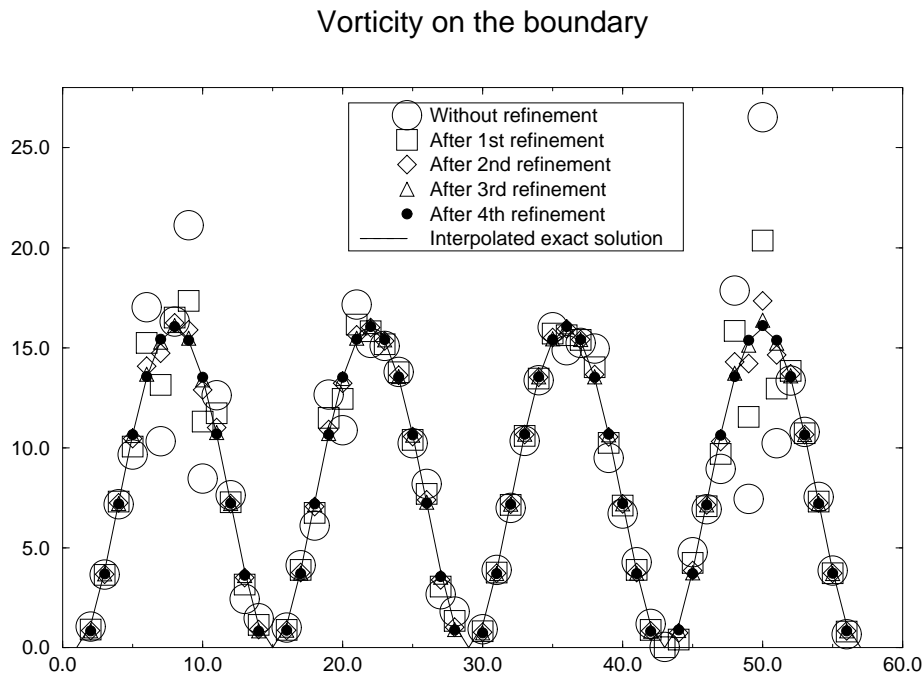


FIG. 3.2 – Valeur du tourbillon sur le bord (maillage A).

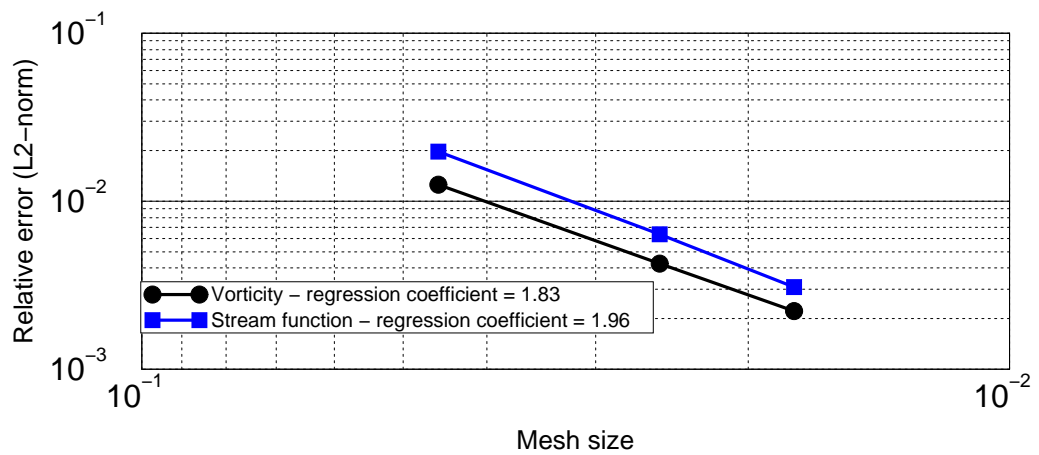


FIG. 3.3 – Ordre de convergence après 4 raffinements.

3.3.2 Méthode intégrale

La méthode précédente permet d'affirmer que la solution aux problèmes numériques rencontrés sur des maillages non structurés est bien d'approcher correctement les fonctions harmoniques qui interviennent dans l'espace des tourbillons. On veut ici calculer vraiment ces fonctions harmoniques et les intégrer au schéma numérique et pour ce faire, on se tourne donc vers les méthodes intégrales.

On définit l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ engendré par les fonctions caractéristiques des arêtes qui forment la trace du maillage \mathcal{T} sur le bord Γ du domaine, ensemble d'arêtes que l'on note $\mathcal{A}(\mathcal{T}, \Gamma)$:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \text{Vect} \{q_i = \mathbb{1}_{\Gamma_i}, \Gamma_i \in \mathcal{A}(\mathcal{T}, \Gamma)\}, \quad (3.11)$$

où $\mathbb{1}_{\Gamma_i}$ est la fonction caractéristique définie de Γ dans \mathbb{R} par :

$$\mathbb{1}_{\Gamma_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Gamma_i \\ 0 & \text{if } x \notin \Gamma_i. \end{cases}$$

La dimension de $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ est égale au nombre d'arêtes du maillage sur le bord du domaine.

Puis, on appelle \mathcal{S} le potentiel de simple couche et on l'applique aux fonctions de $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$:

$$\mathcal{S} : \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \ni q_i \longmapsto \varphi_i \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty} \quad (3.12)$$

où $\varphi_i(x) = \mathcal{S}q_i(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)q_i(y) d\gamma_y \quad \forall x \in \overline{\Omega}$, et $G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log |x - y|$ est le noyau de Green.

On a appelé $\mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty}$ l'espace discret engendré par les fonctions $\varphi_i = \mathcal{S}q_i$, pour tout $q_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. L'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty}$ est de dimension finie et sa dimension est égale à la dimension de $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Cette discrétisation est conforme car $\mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty}$ est contenu dans $\mathcal{H}(\Omega) \subset M(\Omega)$. Par construction, les fonctions de $\mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty}$ sont harmoniques. On notera $S = \gamma\mathcal{S}$ l'opérateur de simple couche \mathcal{S} sur le bord et on introduit $\gamma\varphi_i(x) = Sq_i = \int_{\Gamma_i} G(x, y) d\gamma_y$ pour tout x du bord Γ et $q_i = \mathbb{1}_{\Gamma_i}$ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

La formulation variationnelle discrète du problème de Stokes (3.3) devient ici :

$$\psi_{\mathcal{T}} \in H_{0, \mathcal{T}}^1, \quad \omega_{\mathcal{T}} = \omega_{\mathcal{T}}^0 + \omega_{\mathcal{T}}^{\Delta} \in M_{\mathcal{T}} = H_{0, \mathcal{T}}^1 \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \omega_{\mathcal{T}}^0, \nabla \xi) &= (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \xi) \quad \forall \xi \in H_{0, \mathcal{T}}^1 \\ (\omega_{\mathcal{T}}^{\Delta}, \varphi) &= -(\omega_{\mathcal{T}}^0, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty} \\ (\nabla \psi_{\mathcal{T}}, \nabla \chi) &= (\omega_{\mathcal{T}}^0 + \omega_{\mathcal{T}}^{\Delta}, \chi) \quad \forall \chi \in H_{0, \mathcal{T}}^1. \end{aligned}$$

Opérateur d'interpolation dans $\mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty}$

Pour définir l'opérateur d'interpolation dans $\mathcal{H}_{\mathcal{T}, \infty}$, on commence par définir un opérateur de projection L^2 sur l'espace des fonctions constantes par morceaux $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ défini en (3.11) :

$$\begin{aligned} p_c : L^2(\Gamma) &\longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \\ \rho &\longmapsto p_c \rho \text{ tel que } \int_{\Gamma} (p_c \rho - \rho) \cdot q d\gamma = 0 \quad \forall q \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

On peut maintenant définir l'opérateur d'interpolation de $\mathcal{H}(\Omega)$, espace de fonctions harmoniques dans $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$. On note $\Pi_{\mathcal{T}} : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1_{\mathcal{T}}$ l'opérateur d'interpolation classique de Lagrange associé au maillage \mathcal{T} .

Définition 3.3.6 *Opérateurs d'interpolation.*

L'opérateur d'interpolation $\phi_{\mathcal{T}} : \mathcal{H}(\Omega) \cap H^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ est défini par $\phi_{\mathcal{T}}\varphi^{\Delta} = \zeta$ où ζ est tel que :

$$\zeta(x) = \mathcal{S}p_c(S^{-1}\varphi^{\Delta}) = \int_{\Gamma} G(x,y).p_c(S^{-1}\varphi^{\Delta})(y) d\gamma_y \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

On peut alors définir l'opérateur d'interpolation $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ de $M(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ dans $M_{\mathcal{T}} = H^1_{0,\mathcal{T}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ par les relations :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} : M(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ni \varphi = \varphi^0 + \varphi^{\Delta} \longmapsto \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\varphi = \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 + \phi_{\mathcal{T}}\varphi^{\Delta} \in M_{\mathcal{T}}.$$

Avec cet espace $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ pour approcher l'espace de fonctions harmoniques et l'opérateur d'interpolation tel qu'il est défini, on peut démontrer les résultats de convergence optimaux de la méthode suivants :

Théorème 3.3.7 *Premier résultat de convergence.*

Si \mathcal{T} appartient à une famille régulière de triangulations \mathcal{U}_{σ} ($\sigma > 0$) et $h_{\mathcal{T}}$ est suffisamment petit, le problème discret (3.6)-(3.9) a une unique solution $(\psi_{\mathcal{T}}, \omega_{\mathcal{T}}) \in H^1_{0,\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$, associé au problème de Stokes (2.9)-(2.10). Si $\psi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ et $\omega = \omega^0 + \omega^{\Delta}$ est tel que $\omega \in H^2(\Omega)$ et $\omega^0 \in H^2(\Omega)$, alors :

$$\begin{aligned} \exists C(\sigma) > 0, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{U}_{\sigma}, \\ \|\omega - \omega_{\mathcal{T}}\|_M + \|\psi - \psi_{\mathcal{T}}\|_{1,\Omega} \leq C(\sigma)h_{\mathcal{T}}(|\omega^0|_{2,\Omega} + \|\omega\|_{2,\Omega} + |\psi|_{2,\Omega}). \end{aligned}$$

Remarque 3.3.8 • Si de plus Ω est supposé convexe, on a :

$$\begin{aligned} \exists C(\sigma) > 0, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{U}_{\sigma}, \\ \|\omega - \omega_{\mathcal{T}}\|_M + \|\psi - \psi_{\mathcal{T}}\|_{1,\Omega} \leq C(\sigma)h_{\mathcal{T}}(\|\omega\|_{2,\Omega} + |\psi|_{2,\Omega}). \end{aligned}$$

Le théorème 3.3.7 est important car il montre qu'utiliser un espace de fonctions harmoniques le long du bord donne une erreur d'ordre $\mathcal{O}(h_{\mathcal{T}})$ quand $\omega \in H^2(\Omega)$, ce qui améliore les résultats déjà connus et sont équivalents à ceux prouvés dans [DSS02].

- Si Ω est supposé convexe et sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 3.3.7 et si de plus $\omega \in H^{5/2}(\Omega)$, alors :

$$\exists C(\sigma) > 0, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{U}_{\sigma}, \tag{3.13}$$

$$\|\omega - \omega_{\mathcal{T}}\|_{0,\Omega} + \|\psi - \psi_{\mathcal{T}}\|_{0,\Omega} \leq C(\sigma)h_{\mathcal{T}}^2(\|\omega\|_{5/2,\Omega} + \|\psi\|_{2,\Omega}). \tag{3.14}$$

La dernière partie du théorème précédent nous dit que si la solution est plus régulière, la convergence sera d'ordre 2. C'est ce qui est illustré dans les exemples numériques où les solutions analytiques considérées sont très régulières.

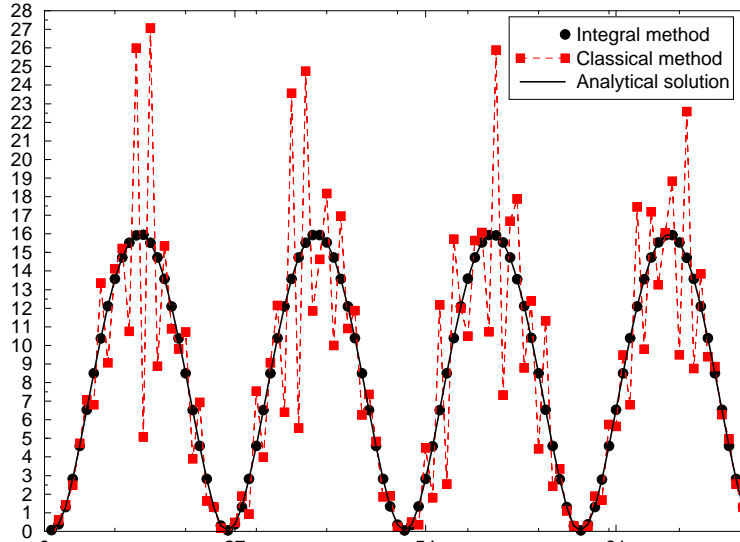


FIG. 3.4 – Comparaison : tourbillon sur le bord - Test de Bercovier-Engelman.

Résultats numériques

On teste cette nouvelle méthode sur le cas test habituel de Bercovier-Engelman [BE79]), d'autres résultats numériques sont disponibles dans le papier [ASS04].

Remarque 3.3.9 *Toutes les intégrales pour assembler la matrice de masse dans l'équation (3.8) ont été calculées avec une formule de Gauss à 7 points et les résultats sont en parfait accord avec la théorie. Le coût de cette intégration peut être réduit en utilisant moins de points loin du bord. Là encore, bien que l'erreur due à l'intégration numérique n'ait pas été prise en compte dans l'estimation d'erreur, il semble que cette dernière soit dominée par les autres erreurs et les résultats n'en sont pas pollués.*

La Figure 3.4 donne les valeurs du tourbillon sur le bord du domaine obtenues par la méthode classique et par la méthode de cette section sur le **même** maillage. En utilisant l'espace des fonctions constantes par arête et comme les solutions sont régulières, on obtient comme attendu par le théorème 3.13, l'ordre 2 de convergence pour les normes L^2 du tourbillon et de la fonction courant, voir Figure 3.5.

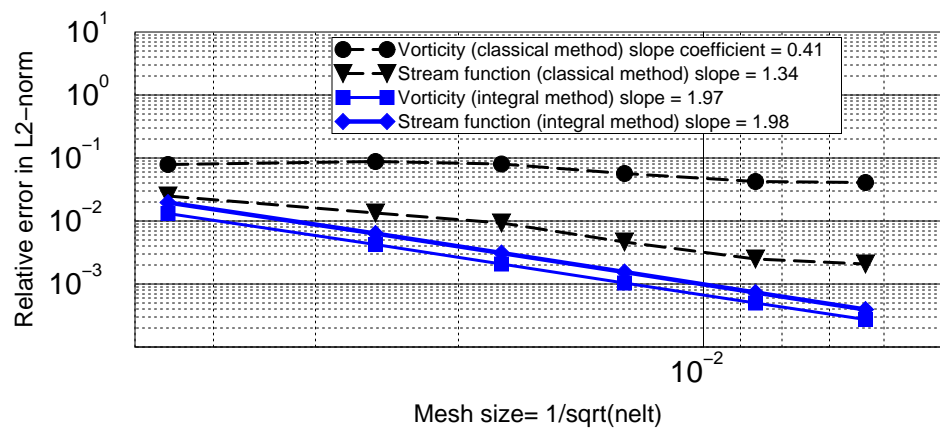


FIG. 3.5 – Ordres de convergence - Test de Bercovier-Engelman.

Chapitre 4

Une première formulation en (ω, u, p)

On présente ici la formulation en tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes (encore appelée en abrégé formulation (ω, u, p)) qui a été introduite par François Dubois [Dub92]. On rappelle les résultats utiles pour la suite obtenus en 2D pendant ma thèse [Sal99] puis ceux contenus dans les articles qui ont suivi : [DSS03a], [DSS03b], [SS07b], [SS07a].

Dans toute la suite, on note Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 suffisamment régulier. Dès que ce sera nécessaire, on ajoutera des hypothèses sur Ω et on précisera sa régularité. On note \mathbf{n} la normale unitaire extérieure à cette frontière (qui existe car la frontière du domaine est suffisamment régulière) et \mathbf{t} le vecteur tangent à cette frontière choisi de sorte que (\mathbf{n}, \mathbf{t}) soit direct.

4.1 Obtention de la formulation

On considère le problème de Stokes bidimensionnel dans le domaine Ω en variables primales :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où \mathbf{u} est la vitesse du fluide, p sa pression, $\nu > 0$ la viscosité cinématique et \mathbf{f} un champ de forces donné. Suivant [Dub92], on écrit ce problème avec pour variables le tourbillon, la vitesse et la pression. Dans les équations précédentes, on introduit le tourbillon ω qui est égal au rotationnel de \mathbf{u} c'est-à-dire $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Comme pour la formulation (ψ, ω) , en utilisant la formule classique et le fait que la vitesse est à divergence nulle : $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = -\Delta\mathbf{u}$, la première équation de (4.1) s'écrit $\nu \operatorname{rot} \omega + \nabla p = \mathbf{f}$, ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\omega - \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.2)$$

$$\nu \operatorname{rot} \omega + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.4)$$

On suppose que le bord du domaine Γ peut être décomposé en deux partitions indépendantes, à savoir :

$$\Gamma = \overline{\Gamma_m} \cup \overline{\Gamma_p} \quad \text{avec} \quad \Gamma_m \cap \Gamma_p = \emptyset \quad ; \quad (4.5)$$

$$\Gamma = \overline{\Gamma_\theta} \cup \overline{\Gamma_t} \quad \text{avec} \quad \Gamma_\theta \cap \Gamma_t = \emptyset \quad . \quad (4.6)$$

Sur chacun de ces morceaux du bord, on suppose que différents types de conditions limites sont donnés : la vitesse normale g_0 sur Γ_m , la pression Π_0 sur Γ_p , le tourbillon θ_0 sur Γ_θ et la vitesse tangentielle σ_0 sur Γ_t . Les conditions limites très générales du problème de Stokes s'écrivent alors :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_m \quad (4.7)$$

$$p = \Pi_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_p \quad (4.8)$$

$$\omega = \theta_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\theta \quad (4.9)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = \sigma_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_t \quad , \quad (4.10)$$

où on rappelle que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$ sont respectivement la composante normale et tangentielle de la vitesse.

N.B. Les conditions (4.7) et (4.9) sont des **conditions de Dirichlet**, ici essentielles car elles seront directement imposées dans l'espace de recherche des champs considérés alors que les conditions (4.8) et (4.10) sont des **conditions naturelles de Neumann**, obtenues naturellement lors de l'obtention de la formulation, d'où leur nom.

On se restreint désormais aux conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= g_0 = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_m \quad , \\ \omega &= \theta_0 = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_\theta \quad , \end{aligned}$$

et on introduit les espaces dans lesquels on cherche les champs inconnus. Pour la vitesse, on a :

$$X = \{ \mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega) / \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_m \} \quad , \quad (4.11)$$

où Γ_m est la partie du bord où la composante normale de la vitesse $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ est donnée.

Pour le tourbillon, on pose :

$$W = \{ \varphi \in H^1(\Omega) / \gamma\varphi = 0 \text{ on } \Gamma_\theta \} \quad . \quad (4.12)$$

Finalement, pour la pression, l'espace dépend de la mesure de Γ_p :

$$Y = \begin{cases} L^2(\Omega) & \text{si } \text{mes}(\Gamma_p) \neq 0 \quad , \\ L_0^2(\Omega) & \text{si } \text{mes}(\Gamma_p) = 0 \quad . \end{cases} \quad (4.13)$$

En effet, s'il n'y a pas de condition limite en pression, la pression est alors définie à une constante additive près. On notera l'espace pour la pression $L_{(0)}^2(\Omega)$ pour ne pas avoir à rappeler cette alternative à chaque fois.

Pour obtenir la formulation variationnelle, multiplions l'équation (4.2) par une fonction test φ de W et intégrons formellement par parties :

$$(\omega, \varphi) - (\text{rot } \mathbf{u}, \varphi) = (\omega, \varphi) - (\mathbf{rot } \varphi, \mathbf{u}) - \langle \mathbf{u}, \mathbf{t}, \gamma\varphi \rangle_\Gamma$$

soit, en tenant compte de la condition limite (4.10)

$$(\omega, \varphi) - (\mathbf{rot } \varphi, \mathbf{u}) = \langle \sigma_0, \gamma\varphi \rangle_\Gamma .$$

Puis, multiplions l'équation (4.3) par \mathbf{v} dans X . Comme formellement

$$(\nabla p, \mathbf{v}) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \langle p, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma}$$

il vient, en tenant compte de la condition limite (4.8)

$$\nu(\operatorname{rot} \omega, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle \Pi_0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} .$$

Multiplions enfin l'équation (4.4) par q dans Y :

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = 0.$$

On obtient finalement la formulation tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } (\omega, \mathbf{u}, p) \text{ dans } W \times X \times Y & \text{tels que :} \\ (\omega, \varphi) - (\operatorname{rot} \varphi, \mathbf{u}) & = \langle \sigma_0, \gamma \varphi \rangle_{\Gamma} \quad \forall \varphi \in W \\ \nu(\operatorname{rot} \omega, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle \Pi_0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mathbf{v} \in X \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) & = 0 \quad \forall q \in Y \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Remarque 4.1.1 *Les objets $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}|_{\Gamma_t}$ (trace tangentielle de la vitesse) et $p|_{\Gamma_p}$ (trace de la pression) ne sont a priori pas définis dans les espaces respectifs $H(\operatorname{div}, \Omega)$ et $L^2(\Omega)$.*

Cette formulation permet, comme on peut le constater facilement, de prendre en compte toute une famille de conditions limites très générales et donc plus physique que la formulation (ψ, ω) , qui ne prend en compte que la condition limite de vitesse nulle au bord. De plus, bien qu'elle implique une inconnue supplémentaire par rapport à la formulation primale, on va voir dans la suite que la formulation (ω, u, p) permet, contrairement à la formulation (u, p) d'avoir la condition d'incompressibilité exactement vérifiée en discret.

4.2 Problème discret et résultats numériques

On commence, pour étudier cette formulation, par la discrétiser par une méthode d'éléments finis (on rappelle qu'un des objectifs est de travailler sur des maillages non structurés d'où le choix naturel de cette méthode) et par regarder les résultats numériques obtenus en 2D. Pour cela, on suppose encore une fois que le domaine Ω est au minimum polygonal, qu'il est donc entièrement recouvert par une triangulation régulière \mathcal{T} composée de triangles non dégénérés dont on note $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des triangles, $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des arêtes des triangles de $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ et $h_{\mathcal{T}}$ leur diamètre maximum.

4.2.1 Espaces discrets

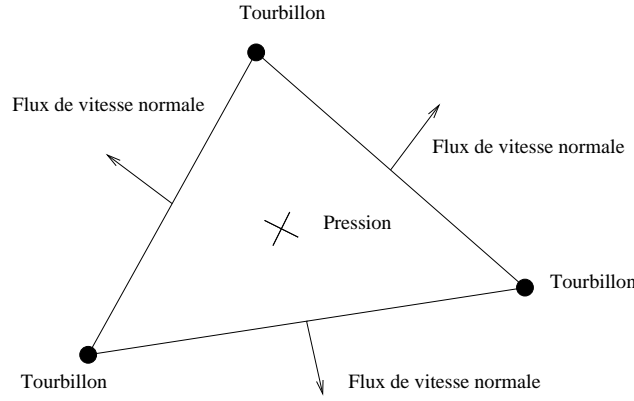
On introduit ici les espaces de dimension finie, $W_{\mathcal{T}}$, $X_{\mathcal{T}}$ et $Y_{\mathcal{T}}$ qui sont respectivement contenus dans W , X et Y car on cherche à obtenir une méthode d'éléments finis **conforme**.

- Pour le tourbillon, on choisit des fonctions continues linéaires par morceaux :

$$P_{\mathcal{T}}^1 = \{ \varphi \in H^1(\Omega) / \varphi|_K \in \mathbb{P}^1(K), \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \} \quad . \quad (4.15)$$

Puis, en incluant la condition limite, on pose pour $W_{\mathcal{T}}$ le sous-espace suivant de W :

$$W_{\mathcal{T}} = \{ \varphi \in P_{\mathcal{T}}^1 / \gamma \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_{\theta} \} \quad . \quad (4.16)$$

FIG. 4.1 – Degrés de liberté pour la formulation (ω, \mathbf{u}, p)

- La vitesse est donnée par ses flux au travers des arêtes des triangles, à l'aide de l'élément fini de Raviart-Thomas, conforme dans $H(\text{div})$ de plus bas degré [RT77] :

$$RT_{\mathcal{T}}^0 = \left\{ \mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega) / \mathbf{v}|_K = \begin{pmatrix} a|_K \\ b|_K \end{pmatrix} + c|_K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \right\} . \quad (4.17)$$

Maintenant, introduisons l'espace discret pour la vitesse, en y incluant la condition limite :

$$X_{\mathcal{T}} = \left\{ \mathbf{v} \in RT_{\mathcal{T}}^0 / \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_m \right\} . \quad (4.18)$$

- Finalement, la pression est choisie constante par morceaux. En posant :

$$P_{\mathcal{T}}^0 = \left\{ q \in L^2(\Omega) / q|_K \in \mathbb{P}^0(K), \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \right\} , \quad (4.19)$$

on définit :

$$Y_{\mathcal{T}} = \left\{ q \in P_{\mathcal{T}}^0 / \int_{\Omega} q \, dx = 0 \text{ si } \text{mes}(\Gamma_p) = 0 \right\} . \quad (4.20)$$

Remarque 4.2.1 • Avec ce choix d'espaces discrets, les degrés de liberté sont bien ceux annoncés dans l'introduction et cette formulation peut donc bien être vue comme une extension de la méthode MAC aux maillages triangulaires non structurés (voir Figure 4.1).

- Une méthode d'éléments finis non conforme n'a pas du tout été envisagée.

4.2.2 Formulation variationnelle discrète

Le problème discret devient alors : trouver $(\omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}})$ dans $W_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{T}} \times Y_{\mathcal{T}}$ tels que

$$\begin{cases} (\omega_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\mathbf{rot} \, \varphi, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) & = \langle \sigma_0, \gamma \varphi \rangle_{\Gamma} & \forall \varphi \in W_{\mathcal{T}} \\ (\mathbf{rot} \, \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) - (p_{\mathcal{T}}, \text{div} \, \mathbf{v}) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle \Pi_0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} & \forall \mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\text{div} \, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q) & = 0 & \forall q \in Y_{\mathcal{T}} \end{cases} . \quad (4.21)$$

Comme précisé un peu plus haut, un des avantages de cette formulation est qu'elle permet d'assurer exactement la condition d'incompressibilité. En effet, on montre très facilement que si la vitesse discrète $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ est cherchée dans l'espace $X_{\mathcal{T}}$ telle que

$$(\text{div} \, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q) = 0 \quad \forall q \in Y_{\mathcal{T}}, \quad (4.22)$$

alors en fait $\text{div} \, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ est exactement nulle (voir [Sal99] - chapitre 2 ou [DSS03a]).

4.2.3 Conditions inf-sup discrètes

Le problème de Stokes en variables primales (u, p) est un problème mixte dont l'étude demande la vérification d'une condition inf-sup ou condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (voir [LU68], [Bab71], [Bre74]) qui lie la vitesse et la pression. Le problème de Stokes en (ω, u, p) est un problème mixte à trois champs, et non plus seulement deux. Il demande donc la vérification de deux conditions inf-sup, une condition en vitesse-pression et une condition liant tourbillon et vitesse.

- La première condition inf-sup discrète en vitesse-pression est très classique dans le cas d'une vitesse cherchée nulle sur tout le bord (voir [RT77]). Or, nous avons besoin ici d'une vitesse cherchée nulle seulement sur une partie du bord notée Γ_m , c'est pourquoi nous avons besoin d'en adapter la preuve que l'on trouvera dans [DSS03a].

Proposition 4.2.2 *Condition inf-sup en vitesse-pression.*

On rappelle la partition du bord $\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_p$. On suppose que Ω est polygonal et borné, et que le maillage \mathcal{T} appartient à une famille régulière de triangulations. Alors, il existe une constante strictement positive a , indépendante de $h_{\mathcal{T}}$, telle que :

$$\inf_{q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}} \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}} \frac{(q_{\mathcal{T}}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}})}{\|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\operatorname{div}, \Omega} \|q_{\mathcal{T}}\|_{0, \Omega}} \geq a \quad . \quad (4.23)$$

Il est à noter que l'hypothèse Ω polygonal est importante car elle donne la régularité nécessaire au problème de laplacien (voir [Gri85], [Mat89] et les références incluses) qui intervient dans la démonstration.

- Pour la deuxième condition inf-sup, on va avoir besoin encore d'une condition sur le domaine pour avoir existence d'un potentiel scalaire et surtout d'une condition sur les deux partitions du bord. En effet, on veut pouvoir montrer que tout champ de vitesse $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ de $X_{\mathcal{T}}$ à divergence nulle (*i.e.* qui appartient à l'espace que l'on notera $V_{\mathcal{T}}$), peut s'écrire comme le rotationnel d'un champ scalaire de $W_{\mathcal{T}}$:

$$\forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{u} \in X_{\mathcal{T}}; \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{rot} \varphi_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}.$$

Pour cela, il faut que la partie où l'on impose le tourbillon Γ_{θ} soit contenue dans la partie où l'on impose la vitesse normale Γ_m . Physiquement, cette condition n'est pas très restrictive car Γ_{θ} est souvent vide!

Proposition 4.2.3 *Condition inf-sup en tourbillon-vitesse.*

On suppose que Ω est simplement connexe. On rappelle les deux partitions du bord :

$$\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_p = \Gamma_{\theta} \cup \Gamma_t \quad .$$

Enfin, on suppose que Γ_m est de mesure positive et que Γ_{θ} est contenue dans Γ_m :

$$\Gamma_{\theta} \subset \Gamma_m.$$

Alors, il existe une constante strictement positive b , indépendante de $h_{\mathcal{T}}$, telle que :

$$\inf_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}} \sup_{\varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot} \varphi_{\mathcal{T}})}{\|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\operatorname{div}, \Omega} \|\varphi_{\mathcal{T}}\|_{1, \Omega}} \geq b \quad . \quad (4.24)$$

L'existence et l'unicité d'une solution discrète à la formulation variationnelle discrète (4.21) découlent alors directement de ces deux conditions inf-sup.

Proposition 4.2.4 *Rappelons les deux partitions du bord :*

$$\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_p = \Gamma_\theta \cup \Gamma_t \quad .$$

Supposons que Γ_m est de mesure strictement positive et que Γ_θ est inclus dans Γ_m :

$$\Gamma_\theta \subset \Gamma_m.$$

Supposons de plus que Ω est polygonal, borné, simplement connexe et que le maillage \mathcal{T} appartient à une famille régulière de triangulations.

Alors, le problème discret qui consiste à trouver $(\omega_\mathcal{T}, \mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T})$ dans $W_\mathcal{T} \times X_\mathcal{T} \times Y_\mathcal{T}$ tel que :

$$\begin{cases} (\omega_\mathcal{T}, \varphi) - (\mathbf{rot} \varphi, \mathbf{u}_\mathcal{T}) & = \langle \sigma_0, \gamma \varphi \rangle_\Gamma & \forall \varphi \in W_\mathcal{T} \\ (\mathbf{rot} \omega_\mathcal{T}, \mathbf{v}) - (p_\mathcal{T}, \text{div} \mathbf{v}) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle \Pi_0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma & \forall \mathbf{v} \in X_\mathcal{T} \\ (\text{div} \mathbf{u}_\mathcal{T}, q) & = 0 & \forall q \in Y_\mathcal{T} \end{cases} .$$

a une unique solution.

4.2.4 Résultat de convergence

Pour étudier la convergence de la méthode, il faut d'abord étudier la stabilité du problème discret qui est le point clé de l'étude de cette formulation (ω, u, p) . En effet, on ne pourra démontrer cette stabilité en 2D et avec le tourbillon dans ce sous-espace W de H^1 , que dans le cas très particulier où $\Gamma_m = \Gamma_\theta$.

Cette hypothèse intervient dans la démonstration de la stabilité (voir [DSS03a]) lorsque l'on a besoin de remplacer une vitesse par le rotationnel d'une fonction dans le même espace que celui où vit le tourbillon (faire $\mathbf{v}_\mathcal{T} = \mathbf{rot} \theta_\mathcal{T}, \theta_\mathcal{T} \in W_\mathcal{T}$, qui est le contraire de ce que l'on faisait pour la condition inf-sup). Il faut que $\mathbf{rot} \theta_\mathcal{T} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_m pour que $\mathbf{rot} \theta_\mathcal{T}$ appartienne à $X_\mathcal{T}$, or θ est nul sur Γ_θ , donc il faut avoir $\Gamma_m \subset \Gamma_\theta$, et comme pour la condition inf-sup il faut $\Gamma_\theta \subset \Gamma_m$, il faut donc que ces parties soient égales. Là encore, exactement comme pour la formulation (ψ, ω) , ce sont les conditions limites sur le tourbillon qui nous empêche de le faire facilement. C'est cette analogie qui nous a amené à regarder de plus près la formulation (ψ, ω) , dont on pensait que tout avait été dit. Nous allons donc devoir faire pour la formulation (ω, u, p) ce que nous avons fait pour la formulation (ψ, ω) . En particulier, nous allons démontrer dans la section suivante que les deux formulations sont équivalentes (formellement et même rigoureusement) aussi bien dans le continu que dans le discret. Donc, le problème vient du fait que le tourbillon n'est pas cherché dans le bon espace, il est cherché plus régulier qu'il n'est, il va donc falloir affaiblir la régularité demandée au tourbillon. C'est ce que l'on fera dans le chapitre suivant.

Une fois la stabilité démontrée, on peut montrer un résultat de convergence, en utilisant des résultats classiques d'interpolation dans les espaces choisis (voir encore [DSS03a]) :

Théorème 4.2.5 *Convergence de la formulation variationnelle discrète.*

o Rappelons les deux partitions du bord :

$$\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_p = \Gamma_\theta \cup \Gamma_t \quad .$$

Supposons que Γ_m est de mesure strictement positive et que Γ_θ est égal à Γ_m :

$$\Gamma_\theta = \Gamma_m.$$

Supposons de plus que Ω est polygonal, borné, simplement connexe et que le maillage \mathcal{T} appartient à une famille régulière de triangulations.

○ Soit (ω, u, p) la solution dans $W \times X \times Y$ du problème continu (4.14) et $(\omega_\mathcal{T}, \mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T})$ dans l'espace $W_\mathcal{T} \times X_\mathcal{T} \times Y_\mathcal{T}$, la solution du problème discret (4.21). On suppose que la solution est telle que : $\omega \in H^2(\Omega)$, $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2$, avec $\operatorname{div} \mathbf{u} \in H^1(\Omega)$, et $p \in H^1(\Omega)$. Alors, il existe une constante C strictement positive et indépendante du maillage telle que :

$$\begin{aligned} & \| \omega - \omega_\mathcal{T} \|_{1,\Omega} + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T} \|_{\operatorname{div},\Omega} + \| p - p_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} \\ & \leq C h_\mathcal{T} (|\omega|_{2,\Omega} + \| \mathbf{u} \|_{1,\Omega} + \| \operatorname{div} \mathbf{u} \|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega}) \quad . \end{aligned}$$

Pour conclure cette section, on vient de voir que la stabilité est le point essentiel qui donne la convergence de la méthode. Remarquons ensuite que dans ce théorème, les hypothèses sur la régularité de la solution et sur le domaine sont classiques à toute méthode d'éléments finis. Par contre, l'hypothèse $\Gamma_\theta = \Gamma_m$ sur la partition de la frontière qui restreint le type de conditions limites envisageables ne nous satisfait pas complètement. D'une part, nous avons annoncé qu'un des gros avantages de la formulation (ω, u, p) est la prise en compte de conditions limites très générales et d'autre part imposer le tourbillon n'est pas complètement naturel physiquement. Néanmoins, ce résultat est intéressant car il permet de travailler et d'obtenir des résultats numériques sur cette formulation (voir section suivante et les travaux [BC06, ABC07], [ABC06, AAB⁺07]).

4.2.5 Résultats numériques

Conditions de Dirichlet sur le tourbillon

Commençons par vérifier que dans le cas $\Gamma_\theta = \Gamma_m$ où le problème est stable théoriquement, les résultats numériques sont ceux attendus.

Prenons à nouveau le cas de Bercovier et Engelman [BE79] et modifions-le afin de rentrer dans le cadre théorique voulu. On reformule alors les conditions limites de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \omega &= 256(y^2(y-1)^2(6x^2-6x+1) + x^2(x-1)^2(6y^2-6y+1)) \text{ sur } \Gamma, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Alors dans ce cas, on a bien Γ_θ et Γ_m égales. La figure 4.2 montre que le schéma est stable sur un maillage de triangles comme annoncé dans le Théorème 4.2.5, et que la convergence est bien en accord avec la théorie : d'ordre 1 pour le rotationnel du tourbillon et pour la vitesse et plus de 1 pour la pression (mieux qu'attendu, super-convergence sur la pression inexplicée jusqu'à maintenant). L'ordre 2 observé pour la norme L^2 du tourbillon est une conséquence classique du lemme d'Aubin-Nitsche dans un domaine Ω convexe (voir par exemple Ciarlet [Cia78]). D'autres résultats numériques peuvent être trouvés dans l'article [DSS03a].

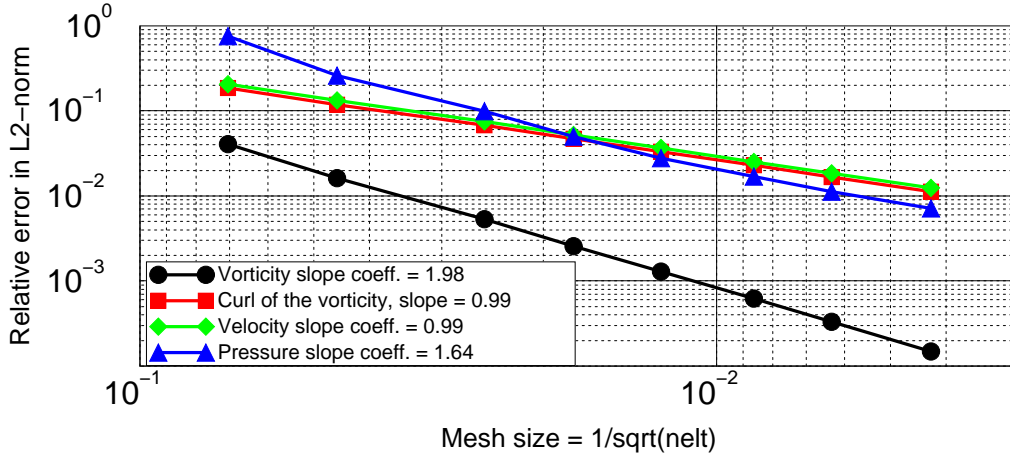


FIG. 4.2 – Ordre de convergence sur le test modifié de Bercovier-Engelman - Maillage non structuré - Cas $\Gamma_m = \Gamma_\theta$.

Conditions de Dirichlet sur la vitesse

Numériquement, le problème de non-stabilité de la formulation tourbillon-vitesse-pression va se traduire par des résultats numériques mauvais dans le cas de conditions limites générales. Comme les formulations sont équivalentes dans le discret (voir section suivante), les résultats vont même être exactement les mêmes que pour la formulation (ψ, ω) , à savoir bons sur des maillages réguliers mais des valeurs du tourbillon (et ici incidemment de la pression) sur le bord qui explosent, même en raffinant le maillage. On regarde le cas test original de Bercovier-Engelman [BE79] avec des conditions limites homogènes sur la vitesse sur tout le bord du domaine $u = 0$ sur Γ . Comme $\Gamma_m = \Gamma_t = \Gamma$, on sait qu'il existe une unique solution (voir la Proposition 4.2.4) mais la stabilité du schéma n'est pas établie dans ce cas (voir Théorème 4.2.5). Néanmoins, on peut voir ([Sal99] ou [DSS03a]) qu'il y a convergence sur les maillages réguliers (des maillages en croix) et que les résultats sont très satisfaisants. Même le rotationnel du tourbillon, qui n'est pas borné théoriquement, converge avec un ordre égal à 1. La convergence de la pression est même meilleure qu'attendue, ce qui peut probablement être attribué à la super-convergence observée sur les maillages carrés (voir [GR86]).

Sur les maillages non structurés (voir un exemple en figure 2.2), les résultats ne sont pas satisfaisants pour le tourbillon et la pression : ils explosent tous les deux au bord du domaine (le maximum est à 27.8 au lieu de 16). De plus, l'erreur sur la pression est à un niveau extrêmement important : plus de 200% en erreur relative pour la norme L^2 (voir la Figure 4.5). Par exemple, la pression varie entre -7.67 et 6.44 au lieu de -0.25 et 0.25 dans le cas de Bercovier-Engelman. On observe aussi que l'ordre de convergence est approximativement en $\mathcal{O}(\sqrt{h_T})$ pour le tourbillon et pour la pression et $\mathcal{O}(h_T)$ pour la vitesse (Figure 4.5).

Bien que le problème ne soit pas stable théoriquement, des résultats de convergence sont obtenus sur des maillages emboîtés obtenus en divisant chaque triangle en quatre triangles homothétiques. En effet, on observe alors une convergence d'ordre 1 pour la norme L^2 de la pression et du tourbillon. Néanmoins, l'erreur sur le rotationnel du tourbillon n'est pas bornée

et les extrema des deux champs augmentent avec le nombre de raffinement du maillage (pour tous ces résultats, voir l'article [DSS03a]).

Pour améliorer les résultats numériques, nous avons aussi construit des champs de vitesse qui permettent de faire $\mathbf{v}_T = \mathbf{rot} \theta_T, \theta_T \in W_T$ dans un sens faible (à savoir en moyenne sur le triangle). Les résultats numériques sont bien meilleurs : l'ordre de convergence sur la vitesse reste le même mais celui sur la norme quadratique du tourbillon varie de 0.41 à 1.36 et de 0.40 à 0.65 pour la pression. De façon très surprenante, le rotationnel du tourbillon, qui est non borné théoriquement, converge avec une pente proche de 1, voir Figure 4.3. De plus, les valeurs numériques du tourbillon et de la pression qui explosent au bord redeviennent raisonnables avec ce schéma stabilisé : la valeur maximum du tourbillon est de 15.97, et la pression varie de -0.18 à 0.19 . L'erreur sur la pression sur le maillage le plus fin est proche de 10%.

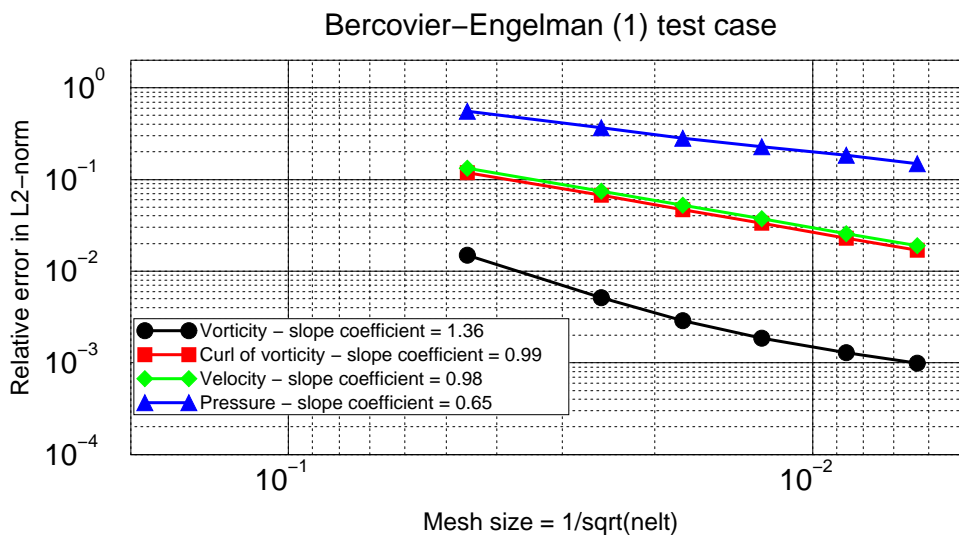


FIG. 4.3 – Ordre de convergence avec stabilisation numérique - Test de Bercovier-Engelman.

Théoriquement pourtant, la convergence n'est pas améliorée (voir l'article [SS07b] pour la description et les résultats de cette méthode, essentiellement numérique).

4.3 Equivalence avec la formulation (ψ, ω)

L'équivalence entre la formulation (ψ, ω) et (ω, u, p) ne nous est pas apparue tout de suite. En effet, chronologiquement, nous avons commencé pendant mon stage de DEA par discrétiser la formulation (ω, u, p) par la méthode d'éléments finis, exposée dans la section précédente, utilisant les espaces naturels de discrétisation de $H^1(\Omega) = W$ pour le tourbillon (polynômes

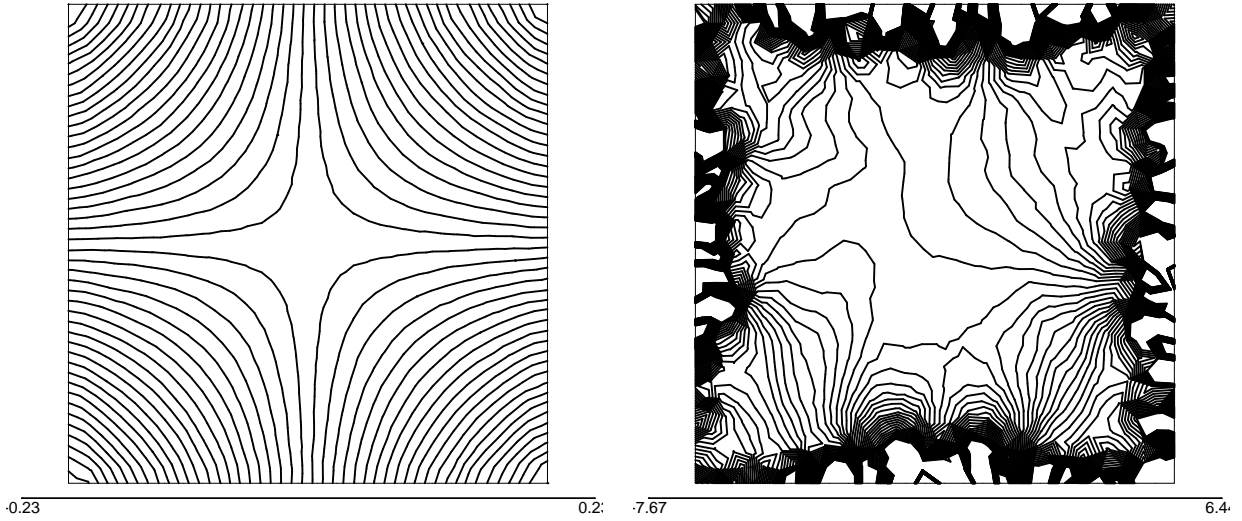


FIG. 4.4 – Isovaleurs de pression - Test de Bercovier-Engelman sur un maillage non structuré - Extrema attendus : -0.25 à 0.25 sur le bord (gauche) - Extrema calculés : -7.6 à 6.4 ! (droite)

\mathbb{P}^1) et de $H(\text{div}; \Omega) = X$ pour la vitesse (éléments de Raviart-Thomas de plus bas degré [RT77]). Comme nous venons de le voir, les résultats numériques très bons sur les maillages structurés, se sont avérés mauvais sur des maillages non structurés. Tout l'objectif de la thèse était alors de comprendre ce comportement et si possible de rectifier les résultats. C'est alors que nous avons démontré que sous certaines hypothèses sur les conditions limites, le problème en (ω, u, p) est bien posé et stable mais que dans le cas de conditions limites générales le problème peut avoir une unique solution mais ne sera pas stable, exactement comme l'est le problème en formulation (ψ, ω) . Donc, nous avons cherché un lien entre les deux formulations et avons même montré qu'elles étaient équivalentes (formellement et en discret dans ma thèse et complètement rigoureusement dans l'article [DSS03b]). Ensuite, nous avons cherché (et trouvé) un moyen d'améliorer les résultats sur la formulation (ψ, ω) plus facile à appréhender, c'est l'objet du troisième chapitre de ce manuscrit qui reprend les résultats publiés dans les articles [DSS02] et [ASS04]. Enfin, nous avons appliqué cette méthode dont on a démontré l'efficacité pour le (ψ, ω) à la formulation (ω, u, p) : les résultats théoriques sont exposés dans l'article [DSS03b] et la méthode numérique en 2D associée l'est dans l'article [SS07a].

• Dans toute cette section, on suppose que Ω est simplement connexe et que la vitesse \mathbf{u} est cherchée identiquement nulle sur tout le bord Γ (la formulation (ψ, ω) ne permettant que cette condition limite). Avec les notations introduites dans (4.7-4.10), cette condition limite correspond dans la formulation (ω, u, p) à :

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \Gamma & g_0 &\equiv 0 & , \\ \Gamma_t &= \Gamma & \sigma_0 &\equiv 0 & . \end{aligned}$$

Le champ de vitesse inconnu \mathbf{u} appartient alors à l'espace $X = H_0(\text{div}; \Omega)$ introduit

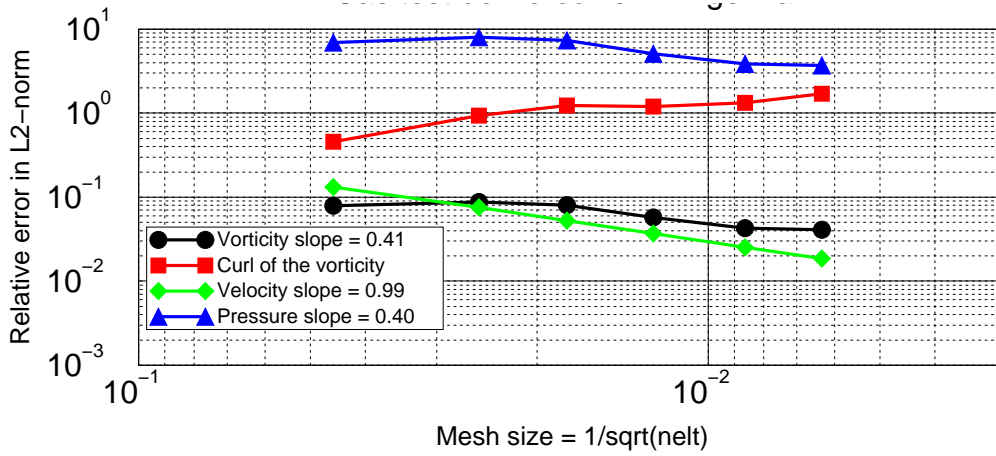


FIG. 4.5 – Ordre de convergence - Maillages non structurés - Test de Bercovier-Engelman.

dans la relation (4.11) et satisfait aussi la condition d'incompressibilité (4.4). Alors, Ω étant simplement connexe, il existe une fonction courant ψ qui appartient à l'espace $H_0^1(\Omega)$ telle que \mathbf{u} est le rotationnel de ψ (voir par exemple Girault et Raviart [GR86]) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot} \psi \quad . \quad (4.25)$$

Alors, les équations (4.2) et (4.3) s'écrivent :

$$\omega + \Delta\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad , \quad (4.26)$$

$$-\Delta\omega = \mathbf{rot} \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad . \quad (4.27)$$

Avec la représentation (4.25), les conditions limites pour la fonction courant sont :

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad . \quad (4.28)$$

Ces équations sont bien les équations du problème de Stokes en fonction courant-tourbillon dont on a discuté dans les premiers chapitres de ce manuscrit. On vient de montrer formellement que les problèmes de Stokes en (ω, \mathbf{u}, p) et en (ψ, ω) sont équivalents. La démonstration rigoureuse est faite dans [DSS03b].

- Observons aussi que dans les deux schémas discrets, le tourbillon est une fonction polynomiale de degré un, continue par morceaux et que la vitesse est constante par triangle. En effet, dans la formulation tourbillon-vitesse-pressure, la vitesse est un vecteur à divergence exactement nulle de l'élément de Raviart-Thomas donc est constante par triangle. Et dans la formulation fonction courant-tourbillon, la fonction courant étant polynomiale par morceaux de degré 1, son rotationnel est aussi constant par triangle. Sur la Figure 4.6, on remarque que les deux codes donnent, sur le même maillage, le même résultat à la précision machine près. On retrouve aussi bien sûr, le même ordre de convergence sur la norme quadratique

du tourbillon et de la vitesse, soit $\mathcal{O}(\sqrt{h_T})$ pour le tourbillon (voir la Figure 4.5), comme attendue dans un domaine convexe par [GR86] et [Sch78], qui est le cas considéré ici. De plus, la norme quadratique du rotationnel du tourbillon a un comportement divergent. Seule la vitesse est correcte et converge en norme quadratique en $\mathcal{O}(h_T^{1-\epsilon})$, $\epsilon > 0$ dans les deux cas.

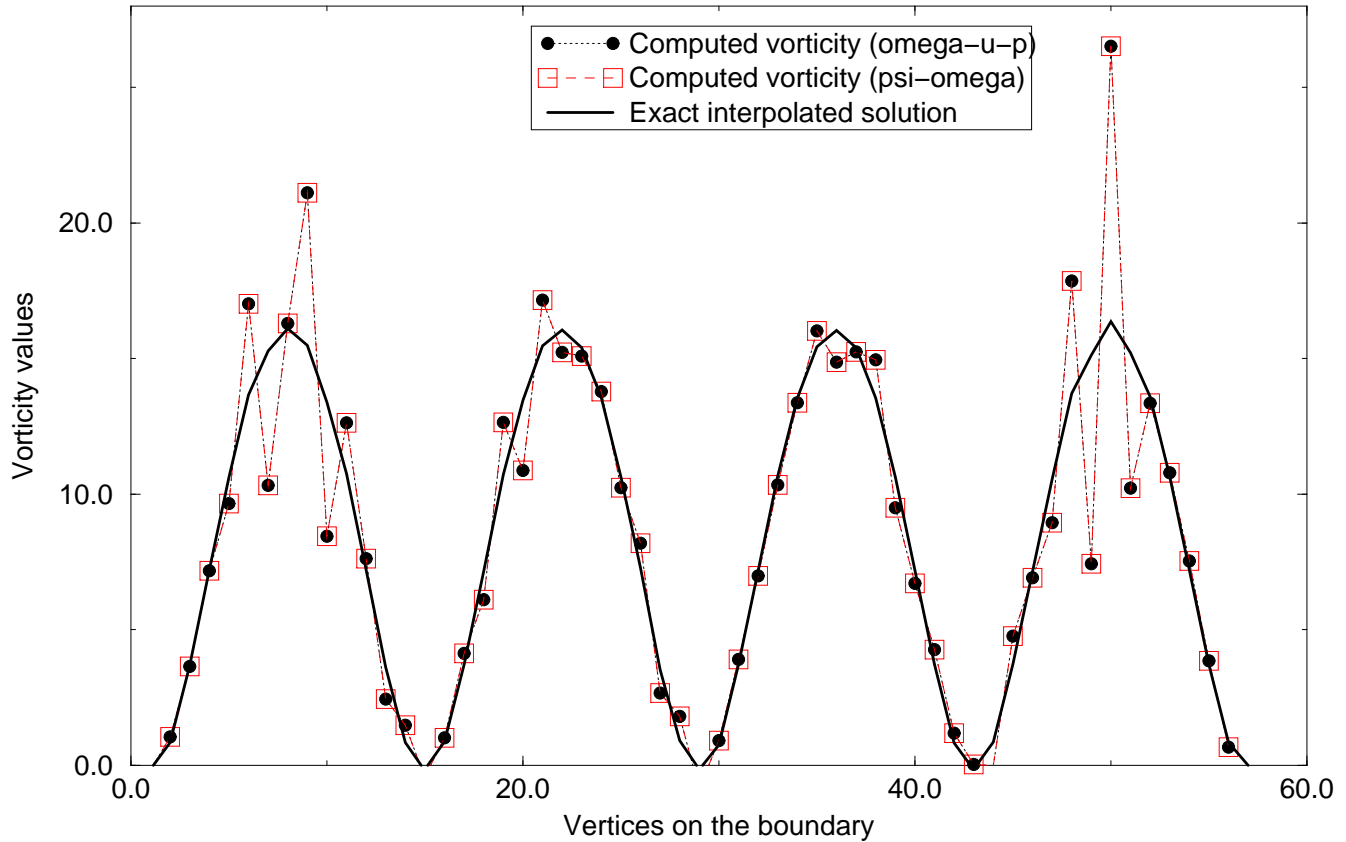


FIG. 4.6 – Valeurs du tourbillon sur le bord - Test de Bercovier-Engelman sur un maillage non structuré.

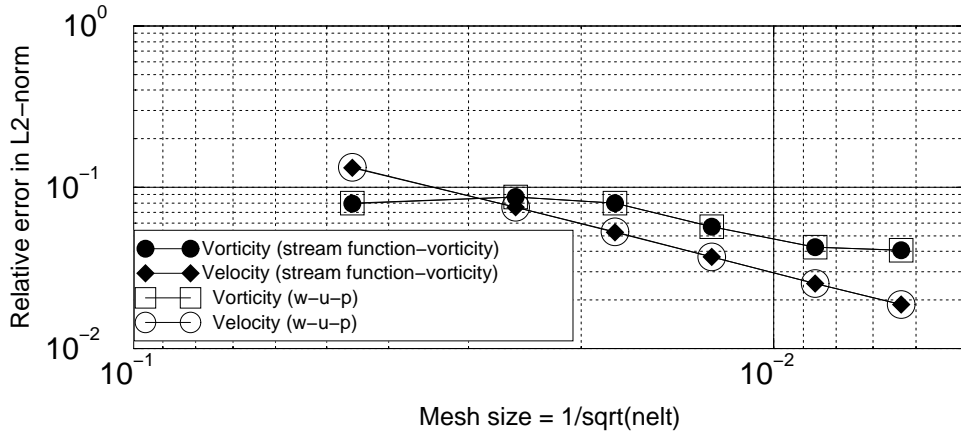


FIG. 4.7 – Comparaison entre les ordres de convergence - Maillages non structurés - Test de Bercovier et Engelman.

4.4 Existence et unicité d'une solution au problème continu en (ω, u, p)

On s'intéresse ici au caractère bien posé du problème de Stokes en (ω, u, p) **continu** *i.e.* à l'existence, l'unicité et la stabilité (au sens continuité des solutions par rapport aux données) d'une solution. Plus précisément, on démontre dans [DSS03b] le problème abstrait suivant :

Théorème 4.4.1 *Formulation variationnelle mixte triple.*

Préliminaires

Soient W , X and Y trois espaces de Hilbert de produits scalaires respectifs $(\cdot, \cdot)_W$, $(\cdot, \cdot)_X$ et $(\cdot, \cdot)_Y$, et de normes respectives $\|\cdot\|_W$, $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$. On suppose qu'il existe deux applications continues $R : W \rightarrow X'$ et $D : X \rightarrow Y'$. On définit l'espace polaire de $\text{Ker}D$:

$$(\text{Ker}D)^0 = \left\{ \xi \in X' , \langle \xi, v \rangle_{X', X} = 0 , \forall v \in \text{Ker}D \right\} , \quad (4.29)$$

et le sous-espace V de W :

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \varphi \in W , \langle R\varphi, v \rangle_{X', X} = 0 , \forall v \in \text{Ker}D \right\} , \\ &= \left\{ \varphi \in W , R\varphi \in (\text{Ker}D)^0 \right\} . \end{aligned} \quad (4.30)$$

On introduit l'injection canonique $i : \text{Ker}D \rightarrow X$, un opérateur continu $J : W \rightarrow W'$ et r l'isomorphisme de Riesz de Y' dans Y . De plus on introduit $D' : Y \rightarrow X'$ et $R' : X \rightarrow W'$ opérateurs duaux de D et R respectivement :

$$\begin{aligned} \langle D'\zeta, x \rangle_{X', X} &= \langle \zeta, Dx \rangle_{Y, Y'} , \quad \forall \zeta \in Y , \forall x \in X , \\ \langle R'\eta, \varphi \rangle_{W', W} &= \langle \eta, R\varphi \rangle_{X, X'} , \quad \forall \eta \in X , \forall \varphi \in W . \end{aligned}$$

Hypothèses

Supposons que :

$$\circ \exists a > 0, \inf_{\substack{q \in Y \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{\langle q, Dv \rangle_{Y, Y'}}{\|v\|_X \|q\|_Y} \geq a \quad ; \quad (4.31)$$

$$\circ \exists b > 0, \inf_{\substack{v \in \text{Ker} D \\ v \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \frac{\langle v, R\varphi \rangle_{X, X'}}{\|v\|_X \|\varphi\|_W} \geq b \quad ; \quad (4.32)$$

$$\circ J \text{ est elliptique sur } V \quad : \\ \exists c > 0, \langle J\varphi, \varphi \rangle_{W', W} \geq c \|\varphi\|_W^2 \quad \text{for all } \varphi \in V \quad . \quad (4.33)$$

Conclusion

Alors, pour tout $\sigma = (\lambda, \mu, \nu)$ dans $W' \times X' \times Y'$, le problème : trouver $\xi = (\omega, u, p)$ dans $W \times X \times Y$ tels que pour tout $\eta = (\varphi, v, q)$ in $W \times X \times Y$:

$$\begin{cases} \langle J\omega, \varphi \rangle_{W', W} - \langle R'u, \varphi \rangle_{W', W} &= \langle \lambda, \varphi \rangle_{W', W} & \forall \varphi \in W \\ \langle R\omega, v \rangle_{X', X} - \langle D'p, v \rangle_{X', X} &= \langle \mu, v \rangle_{X', X} & \forall v \in X \\ \langle Du, q \rangle_{Y', Y} &= \langle \nu, q \rangle_{Y', Y} & \forall q \in Y, \end{cases}$$

a une unique solution $(\omega(\sigma), u(\sigma), p(\sigma)) \in W \times X \times Y$ qui dépend continuellement des données $\sigma = (\lambda, \mu, \nu)$ i.e. il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\sigma \in W' \times X' \times Y'$:

$$\|\omega(\sigma)\|_W + \|u(\sigma)\|_X + \|p(\sigma)\|_Y \leq C \|\sigma\|_{W' \times X' \times Y'} \quad . \quad (4.34)$$

Le problème de Stokes en (ω, u, p) s'écrit alors comme ce problème abstrait en prenant pour W l'espace $H_0^1(\Omega; \Gamma_\theta) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \gamma\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_\theta\}$, pour X l'espace $H_0(\text{div}, \Omega; \Gamma_m) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_m\}$, pour Y l'espace $L_{(0)}^2(\Omega)$ et pour opérateurs le rotationnel pour R , la divergence pour D et le produit scalaire L^2 pour J .

Dans ma thèse, on obtenait que le problème de Stokes est bien posé (donc qu'il existe une et une seule solution qui dépend continûment des données) sous les hypothèses (H1) et (H2) suivantes :

1. (H1) la partition du bord est unique $\Gamma_m = \Gamma_\theta$ donc $\Gamma_p = \Gamma_t$,
2. (H2) il n'y a pas de singularité i.e. il n'existe pas de vecteurs de $(L^2(\Omega))^2$ qui soient à la fois à divergence et rotationnels nuls sur Ω et dont la trace normale est nulle sur Γ_m et la trace tangentielle nulle sur Γ_p .

Ces conditions apparaissent dans la démonstration de l'hypothèse (4.33) et dans la condition inf-sup en tourbillon vitesse (4.32) car elles permettent d'assurer que toute fonction à divergence nulle de l'espace des vitesses s'écrit comme le rotationnel d'un champ de l'espace des tourbillons. Autrement dit que le noyau de la divergence dans l'espace X des vitesses est l'image par le rotationnel de W ; c'est d'ailleurs sous cette forme qu'était écrit le problème abstrait dans ma thèse et non pas sous celle présentée ici qui provient de l'article [DSS03b] et qui va permettre d'étendre le cadre bien posé dans le chapitre suivant.

Plus précisément encore, la démonstration de la condition inf-sup en tourbillon-vitesse fait appel à la décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteurs de $(L^2(\Omega))^N$ en sa partie à divergence nulle (sous la forme d'un rotationnel), sa partie à rotationnel nul (sous la

forme d'un gradient) et des singularités qui sont à la fois à divergence et à rotationnel nuls. L'espace où vivent les singularités est bien connu lorsque l'un des potentiels est cherché à trace nulle sur toute la frontière. Gérer les conditions limites mêlées et donc connaître cet espace de singularités dans ce cas est plus difficile. Il faut donc souvent se ramener, soit aux conditions imposées sur toute la frontière, soit supposer que le domaine est suffisamment régulier pour que cet espace soit, soit réduit à zéro, soit de dimension finie et donc maîtrisable.

Dans le cadre de la thèse et donc de l'article [DSS03a], supposer (H1) et (H2) permet d'avoir que tout champ de vecteurs à divergence nulle de $X = H_0(\text{div}, \Omega; \Gamma_m)$ (donc à trace normale nulle sur Γ_m) s'écrit comme le rotationnel d'un champ de $W = H_0^1(\Omega; \Gamma_\theta = \Gamma_m)$ soit

$$\forall \mathbf{v} \in X, \quad \mathbf{v} = \text{rot } \varphi, \quad \varphi \in W.$$

En effet, le gradient disparaît à cause de la divergence nulle et on a supposé qu'il n'existait pas de singularités. L'hypothèse $\Gamma_m = \Gamma_\theta$ permet d'affirmer que le potentiel scalaire φ est bien dans l'espace W car sa trace est bien nulle sur $\Gamma_\theta = \Gamma_m$.

On va pouvoir étendre le cadre bien posé sous d'autres hypothèses en changeant l'espace W des tourbillons, voir pour cela le chapitre suivant. Mais l'on peut déjà voir que l'on a étendu avec la formulation (ω, u, p) le cadre de la formulation (ψ, ω) puisque celle-ci n'est valable que dans le cas $\Gamma_m = \Gamma_t = \Gamma$. On permet donc ici de n'imposer que la vitesse normale et ce, que sur un bout de la frontière.

Remarque 4.4.2 – *Nous avons retrouvé dans le discret la condition sur la partition de la frontière car elle est nécessaire dans un sens ($\Gamma_\theta \subset \Gamma_m$) pour démontrer la condition inf-sup discrète tourbillon-vitesse et dans l'autre pour la stabilité du problème.*

- *Notez bien que la condition inf-sup continue en pression-vitesse se démontre sans hypothèses particulières (comme la discrète d'ailleurs) et ce pour des conditions limites très générales. Comme elle n'était utilisée que dans le cas de conditions de nullité de la vitesse normale sur tout le bord du domaine, on a refait la démonstration pour prendre en compte des conditions limites sur la vitesse normale que sur un bout du bord du domaine $\Gamma_m \subset \Gamma$ (la démonstration est faite dans [Sal99] en 2D, mais la dimension n'intervient pas dans la démonstration).*

Chapitre 5

Formulation bien posée en (ω, u, p)

5.1 Le nouvel espace des tourbillons

On vient de voir, que tel qu'elle a été introduite plus haut, avec le tourbillon cherché dans un sous-espace de $H(\mathbf{rot})$ ($= H^1(\Omega)$ en 2d), la formulation (ω, u, p) présente exactement le même défaut que la formulation (ψ, ω) (voir Chapitre 1). Donc, il va falloir s'inspirer de ce qui a été fait dans le chapitre 3 pour obtenir une formulation bien posée en (ω, u, p) : en particulier trouver le bon espace dans lequel chercher le tourbillon. On rappelle que le tourbillon est cherché plus régulier qu'il n'est, il faut donc affaiblir la régularité. Si l'on regarde la deuxième équation du problème de Stokes et en particulier le terme $(\mathbf{rot} \omega, v)$, il suffit qu'en fait le rotationnel du tourbillon soit dans le dual de l'espace des vitesses (suggestion de M. Amara [Ama97]). La principale difficulté que nous avons rencontrée en introduisant un tel espace est d'en vérifier les propriétés. Or nous n'avons pas pu démontrer facilement que cet espace est un espace de Hilbert lorsque l'espace des vitesses est différent de $H_0(\text{div}, \Omega)$ (en fait on utilise explicitement la densité de $(\mathcal{D}(\Omega))^N$, $N = 2, 3$ dans $H_0(\text{div}, \Omega)$).

On se restreint donc aux conditions limites suivantes pour la formulation (ω, u, p) :

$$\Gamma = \overline{\Gamma_\theta} \cup \overline{\Gamma_t} \text{ avec } \Gamma_\theta \cap \Gamma_t = \emptyset \quad .$$

$$\begin{aligned} \gamma\omega &= 0 \text{ sur } \Gamma_\theta \text{ en } 2d, \\ \omega \times n &= 0 \text{ sur } \Gamma_\theta \text{ en } 3d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \cdot t &= \sigma_0 \text{ sur } \Gamma_t \text{ en } 2d, \\ n \times u \times n &= \sigma_0 \text{ sur } \Gamma_t \text{ en } 3d. \end{aligned}$$

$$\Gamma_m \equiv \Gamma \quad \text{et} \quad \Gamma_p \equiv \emptyset \quad . \quad (5.1)$$

Ainsi l'espace des vitesses devient

$$X = \{v \in H(\text{div}, \Omega) , v \cdot n|_\Gamma = 0\} = H_0(\text{div}, \Omega) \quad , \quad (5.2)$$

et celui des pressions :

$$Y = L_0^2(\Omega) \quad . \quad (5.3)$$

L'espace W des tourbillons au lieu d'être un sous-espace de $H(\mathbf{rot})$ ($= H^1(\Omega)$ en 2d) devient un nouvel espace fonctionnel $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$.

• Nous avons déjà introduit l'espace $H_0(\text{div}, \Omega)$ des vitesses. Commençons par rappeler comment gérer l'espace dual $(H_0(\text{div}, \Omega))'$. Comme $(H_0(\text{div}, \Omega))'$ est un sous-espace de $(\mathcal{D}'(\Omega))^N$, si l'on considère une forme linéaire T de $(\mathcal{D}'(\Omega))^N$, T appartient à l'espace $(H_0(\text{div}, \Omega))'$ si et seulement si T est continue pour la topologie $H(\text{div})$, *i.e.* s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall v \in (\mathcal{D}(\Omega))^N, |\langle T, v \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^N, (\mathcal{D}(\Omega))^N}| \leq C \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

• Pour $\varphi \in (L^2(\Omega))^{2N-3}$, la distribution **rot** φ est bien définie pour $(\mathcal{D}'(\Omega))^N$ et est donnée par :

$$\langle \text{rot } \varphi, v \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^N, (\mathcal{D}(\Omega))^N} = (\varphi, \mathbf{rot } v)_0, \quad \forall v \in (\mathcal{D}(\Omega))^N$$

On se restreint alors aux champs $\varphi \in (L^2(\Omega))^{2N-3}$ tels que la distribution **rot** φ est **continue** pour la norme $H(\text{div})$. Ce qui donne un sens mathématique au produit de dualité $\langle \text{rot } \omega, v \rangle$ quand v est un vecteur de l'espace $H_0(\text{div}, \Omega)$.

Définition 5.1.1 *Espace fonctionnel pour le tourbillon.*

On appelle $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ l'espace :

$$H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega) = \left\{ \varphi \in (L^2(\Omega))^N, \exists C > 0, \forall v \in (\mathcal{D}(\Omega))^N, \begin{array}{l} |(\varphi, \mathbf{rot } v)_0| \leq C \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

• On note $\langle \bullet, \bullet \rangle_{\text{div}^*, \text{div}}$ le produit de dualité entre $H_0(\text{div}, \Omega)$ et son dual. Alors, la norme d'un élément de $(H_0(\text{div}, \Omega))'$ est définie comme suit :

$$(H_0(\text{div}, \Omega))' \ni \zeta \longmapsto \|\zeta\|_{\text{div}^*, \Omega} = \sup_{v \in H_0(\text{div}, \Omega)} \frac{\langle \zeta, v \rangle_{\text{div}^*, \text{div}}}{\|v\|_{\text{div}, \Omega}}. \quad (5.5)$$

Proposition et définition 5.1.2 *Opérateur rotationnel faible.*

• Pour toute fonction φ dans $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$, l'application $R_*\varphi$ définie par :

$$(\mathcal{D}(\Omega))^N \ni v \longmapsto \langle R_*\varphi, v \rangle_{\text{div}^*, \text{div}} = (\varphi, \mathbf{rot } v)_0, \quad (5.6)$$

est continue de l'espace $(\mathcal{D}(\Omega))^N$ dans \mathbb{R} pour la topologie $H(\text{div}, \Omega)$.

• Alors, pour $\varphi \in H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$, l'application $R_*\varphi$ peut être uniquement étendue par continuité à l'espace $H_0(\text{div}, \Omega)$ et l'application :

$$R_* : H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega) \ni \varphi \longmapsto R_*\varphi \in (H_0(\text{div}, \Omega))'$$

est bien définie.

• L'application :

$$H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega) \ni \varphi \longmapsto \|\varphi\|_{\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega} = \left(\|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|R_*\varphi\|_{\text{div}^*, \Omega}^2 \right)^{1/2} \quad (5.7)$$

est une norme sur l'espace $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$. De plus, pour cette norme et pour le produit scalaire associé, $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ est un espace de Hilbert.

Remarque 5.1.3 Notez bien que c'est ce point qui nous oblige à restreindre les possibilités de conditions limites en vitesse normale à toute la frontière. En particulier, notez que l'on peut définir $\langle R_*\varphi, v \rangle_{\text{div}^*, \text{div}}$ pour une fonction v dans $H_0(\text{div}, \Omega)$, mais que l'on ne sait pas définir $\langle R_*\varphi, v \rangle_{\text{div}^*, \text{div}}$ pour une fonction v quelconque dans $H(\text{div}, \Omega)$. Nous n'avons pas encore eu le temps de nous pencher sur les conséquences de l'hypothèse $\Gamma_m \neq \Gamma$.

- On trouvera les démonstrations des propriétés suivantes de l'espace $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ dans [DSS03b]. On commence par montrer que cet espace $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ n'est pas vide car il contient $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ et que R_* est l'extension naturelle de l'opérateur bien connu de rotationnel puisqu'ils coïncident sur les fonctions régulières. Donc, dans toute la suite on utilisera la notation $\mathbf{rot} \varphi$, $\varphi \in H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ plutôt que $R_*\varphi$.

L'espace $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ est dense dans $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ pour la norme $\|\bullet\|_{\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega}$ et on peut définir une extension de la trace tangentielle, elle-même naturellement définie dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$, pour les fonctions de $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$. Soit Γ_1 une partie arbitraire du bord Γ , et n la normale extérieure à Γ , on définit l'espace des fonctions vectorielles tangentielles au bord qui sont non nulles sur Γ_1 par :

$$TH_{00}^{1/2}(\Gamma_1) = \{ \gamma\xi, \xi \in (H^1(\Omega))^N, \gamma\xi \cdot n \equiv 0 \text{ on } \Gamma, \gamma\xi \times n = 0 \text{ on } \Gamma_1^c \} \quad .$$

Remarquons qu'un élément ξ de $(H^1(\Omega))^N$ tel que : $\xi \cdot n = 0$ sur Γ , appartient aussi à l'espace $H_0(\text{div}, \Omega)$. Comme les traces coïncident sur les fonctions régulières, dans toute la suite, on notera $\gamma_{\Gamma_1} \times \varphi$ par $\varphi \times n|_{\Gamma_1}$, pour tout φ dans $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$.

- On peut maintenant définir l'espace où l'on cherche le tourbillon : ce sont les fonctions de $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ dont la trace tangentielle est nulle sur la partie Γ_θ de Γ . On pose :

$$W = \left\{ \varphi \in H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega), \varphi \times n|_{\Gamma_\theta} = 0 \text{ dans } \left(TH_{00}^{1/2}(\Gamma_\theta) \right)' \right\} \quad . \quad (5.8)$$

Cette définition permet d'introduire l'opérateur rotationnel suivant $R : W \longrightarrow X'$ pour les fonctions de W . Ainsi, l'expression $\langle R\varphi, \mathbf{v} \rangle_{X', X}$ est bien définie pour tout $\varphi \in W$, $v \in X$. La norme dans W est naturellement définie comme suit :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\text{rot}, \text{div}^*, \Omega}^2 &= \|\varphi\|_{0, \Omega}^2 + \|R\varphi\|_{\text{div}^*, \Omega}^2 \\ &= \|\varphi\|_{0, \Omega}^2 + \left(\sup_{v \in H_0(\text{div}, \Omega)} \frac{\langle R\varphi, v \rangle_{\text{div}^*, \text{div}}}{\|v\|_{\text{div}, \Omega}} \right)^2 . \end{aligned}$$

5.2 Forme abstraite du problème de Stokes

Le but de cette section est d'appliquer le théorème abstrait (Théorème 4.4.1) au problème de Stokes. Comme la vitesse est donnée dans l'espace $X = H_0(\text{div}, \Omega)$, son rotationnel ne peut être défini qu'au sens des distributions. Donc l'équation $\omega = \mathbf{rot} u$ doit être vérifiée en un sens faible.

D'abord, donnons un sens à $\text{rot} u$ pour u dans $H_0(\text{div}, \Omega)$ par dualité. Pour cela, définissons $R : W \subset H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega) \longrightarrow X'$ à l'aide de l'opérateur de rotationnel, introduit précédemment, de $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ dans $(H_0(\text{div}, \Omega))' = X'$. Alors l'opérateur dual $R' : X \longrightarrow W'$ donne

un sens à $\text{rot } u$ dans W' pour $u \in X$. Ensuite introduisons un opérateur de masse abstrait $J : W \longrightarrow W'$ et l'équation $\omega = \text{rot } u$ devient, dans une version générale faible, dans W' :

$$J\omega = R'u \quad \text{dans } W' , \quad u \in X , \quad \omega \in W.$$

• On introduit maintenant l'opérateur de divergence D de sorte que $\langle Dv, q \rangle_{Y', Y}$ soit bien défini pour tout $v \in X$ et $q \in Y$.

• Avec les notations introduites précédemment, le problème de Stokes (4.2-4.10) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega \in W , \quad u \in X , \quad p \in Y \quad \text{tels que :} \\ J\omega = R'u \quad \text{dans } W' , \\ R\omega - D'p = f \quad \text{dans } X' , \\ Du = 0 \quad \text{dans } Y'. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

La formulation variationnelle du problème est obtenue en faisant agir la première équation de (5.9) sur une fonction $\varphi \in W$, la seconde sur $v \in X$ et la dernière sur $q \in Y$. Ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\omega, u, p) \in W \times X \times Y \text{ tels que , pour tout } (\lambda, \mu, \nu) \in W' \times X' \times Y' : \\ \langle J\omega, \varphi \rangle_{W', W} - \langle R'u, \varphi \rangle_{W', W} = \langle \lambda, \varphi \rangle_{W', W} , \quad \forall \varphi \in W \\ \langle R\omega, v \rangle_{X', X} - \langle D'p, v \rangle_{X', X} = \langle \mu, v \rangle_{X', X} , \quad \forall v \in X \\ \langle Du, q \rangle_{Y', Y} = \langle \nu, q \rangle_{Y', Y} , \quad \forall q \in Y. \end{array} \right.$$

Le problème (5.9) découle du précédent en prenant :

$$\lambda = 0 , \quad \mu = f , \quad \nu = 0 .$$

5.3 Caractère bien posé du problème continu en 2D

Commençons par comparer les espaces de tourbillon pour la formulation tourbillon-vitesse-pression et la formulation fonction courant-tourbillon dans des domaines bi-dimensionnels *i.e.* les espaces $W = \left\{ \varphi \in H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega) , \gamma\varphi|_{\Gamma_\theta} = 0 \right\}$, $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ et $M(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega), \Delta\varphi \in H^{-1}(\Omega) \right\}$.

Lemme 5.3.1 *L'espace $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ (et donc W) est inclus dans $M(\Omega)$ et, pour tout φ dans $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$, on a :*

$$\forall \chi \in H_0^1(\Omega) , \quad \langle -\Delta\varphi, \chi \rangle_{-1, 1} = \langle \mathbf{rot} \varphi, \mathbf{rot} \chi \rangle_{X', X} . \quad (5.10)$$

De plus, l'inclusion est continue :

$$\forall \varphi \in H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega) , \quad \|\varphi\|_M \leq \|\varphi\|_{\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega} . \quad (5.11)$$

Proposition 5.3.2 *Comparaison des espaces de tourbillon.*

Soit Ω un ouvert borné connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^2 dont le bord Γ est supposé de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Alors, l'espace $H(\mathbf{rot}, \text{div}^, \Omega)$, défini en (5.4), est égal à l'espace $M(\Omega)$ défini en (3.1) et les normes dans ces deux espaces sont équivalentes.*

Remarque 5.3.3 • *L'intérêt d'avoir écrit que les espaces sont égaux en deux propositions et non pas en une seule, est que l'on peut voir que l'inclusion dans un sens est toujours vérifiée et que l'autre sens demande une régularité sur le domaine.*

- *Encore une fois, ce qui est caché derrière cette hypothèse de régularité sur le domaine est le fait de pouvoir utiliser la décomposition de Helmholtz en faisant disparaître toutes les singularités (voir pour cela le chapitre suivant).*

• On a déjà introduit l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions harmoniques de $L^2(\Omega)$. Alors l'espace qui apparaît dans le théorème abstrait est caractérisé par :

Lemme 5.3.4 *Soit Ω un ouvert borné connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^2 dont le bord Γ est supposé de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Alors, l'espace V est inclus dans $\mathcal{H}(\Omega)$. De plus, si $\Gamma_t \equiv \Gamma$ (ie $\Gamma_\theta = \emptyset$), les espaces V et $\mathcal{H}(\Omega)$ sont égaux.*

• Une conséquence importante de ce résultat est d'obtenir un autre cas que celui déjà présenté dans ma thèse où le problème de Stokes en tourbillon-vitesse-pression est bien posé (attention néanmoins, il faut changer l'espace des tourbillons).

Théorème 5.3.5 *Caractère bien posé du problème de Stokes en 2D.*

• *Soit Ω un ouvert borné connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^2 dont le bord Γ est supposé de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Soit $(\Gamma_t, \Gamma_\theta)$ une partition de Γ . On considère les espaces fonctionnels suivants :*

$$W = \left\{ \varphi \in H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega) , \gamma\varphi|_{\Gamma_\theta} = 0 \right\}, X = H_0(\text{div}, \Omega), Y = L^2_0(\Omega),$$

et les opérateurs agissant sur ces espaces :

$$R : W \longrightarrow X' ; D : X \longrightarrow Y' ; J : W \longrightarrow W',$$

où la fonctionnelle J est le produit scalaire $L^2(\Omega)$:

$$\langle J\omega, \varphi \rangle_{W', W} = (\omega, \varphi)_0 \quad \forall \varphi \in W.$$

On note r l'isomorphisme de Riesz de Y' dans Y .

• *Alors, pour tout \mathbf{f} dans $(L^2(\Omega))^2$, le problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\omega, u, p) \in W \times X \times Y \text{ tels que :} \\ \langle J\omega, \varphi \rangle_{W', W} - \langle R'u, \varphi \rangle_{W', W} = 0, \quad \forall \varphi \in W \\ \langle R\omega, v \rangle_{X', X} - \langle D'p, v \rangle_{X', X} = (f, v)_0, \quad \forall v \in X \\ \langle Du, q \rangle_{Y', Y} = 0, \quad \forall q \in Y \end{array} \right.$$

est bien posé et est exactement le problème de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega - \text{rot } u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{rot } \omega + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{div } u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ u \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_t, \\ \omega = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\theta. \end{array} \right.$$

5.4 Convergence du problème discret 2D

Le dernier théorème permet de voir que théoriquement en prenant pour espace des tourbillons, l'espace que l'on a appelé $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$, le problème en (ω, u, p) est bien posé. Toute la difficulté numériquement est donc de discrétiser ce nouvel espace. Or, on vient aussi de voir (Proposition 5.3.2) que cet espace un peu exotique n'est autre (dans le cas de domaine régulier) que l'espace $M(\Omega)$ que nous savons discrétiser (voir pour cela le Chapitre 2). Vérifions donc numériquement que dans ce cadre, les résultats numériques sont bien ceux attendus.

On se place donc dans le cas du théorème précédent :

$$\begin{aligned} \Gamma_p &= \emptyset \text{ donc } \Gamma_m = \Gamma. \\ u \cdot n &= 0 \text{ sur } \Gamma \quad . \end{aligned} \quad (5.12)$$

Par souci de clarté de l'exposé, on va de plus supposer que $\Gamma_\theta = \emptyset$ et donc que $\Gamma_t = \Gamma$

$$u \cdot \mathbf{t} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad . \quad (5.13)$$

Cette dernière hypothèse n'est absolument pas nécessaire, les preuves qui suivent sont vraies avec une condition de Dirichlet sur un morceau $\Gamma_\theta \neq \emptyset$ de Γ pour le tourbillon.

• Supposons que l'on cherche le tourbillon dans l'espace $M(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) / \Delta\varphi \in H^{-1}(\Omega)\}$, la vitesse dans l'espace $X = H_0(\text{div}, \Omega)$ et la pression dans $Y = L_0^2(\Omega)$. La formulation variationnelle du problème de Stokes en (ω, u, p) est la suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\omega, u, p) \text{ in } M \times X \times Y \text{ tels que} \\ (\omega, \varphi) - \langle \mathbf{rot} \varphi, u \rangle_{X', X} = 0 \quad \forall \varphi \in M \\ \langle \mathbf{rot} \omega, \mathbf{v} \rangle_{X', X} - (p, \text{div } \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X \\ (\text{div } u, q) = 0 \quad \forall q \in Y. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

A partir de maintenant et dans toute la suite, on notera encore $(\mathbf{rot} \varphi, v)$ pour le produit de dualité entre X' et X .

Comme dans le chapitre précédent, les vitesses sont approchées à l'aide de l'élément de Raviart-Thomas

$$X_T = \{v \in RT_T^0 / v \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad ,$$

et la pression à l'aide de fonctions constantes par morceaux :

$$Y_T = \left\{ q \in P_T^0 / \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\} \quad .$$

Et comme dans le chapitre 3, l'espace des tourbillons $M(\Omega)$ est approché par :

$$M_T = H_{0,T}^1 \oplus \mathcal{H}_{T,\infty},$$

avec $\mathcal{H}_{T,\infty}$ l'espace discret engendré par les fonctions $\varphi_i = \mathcal{S}q_i$, pour tout $q_i \in \mathcal{C}_T$ où on rappelle que \mathcal{C}_T est l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des arêtes (voir Définition 3.11) et \mathcal{S} le potentiel de simple couche (voir 3.12). Alors, le problème discret consiste à trouver (ω_T, u_T, p_T) dans $M_T \times X_T \times Y_T$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\omega_T, \varphi_T) - (\mathbf{rot} \varphi_T, u_T) = 0 \quad \forall \varphi_T \in M_T \\ (\mathbf{rot} \omega_T, v_T) - (p_T, \text{div } v_T) = (\mathbf{f}, v_T) \quad \forall v_T \in X_T \\ (\text{div } u_T, q_T) = 0 \quad \forall q_T \in Y_T \quad . \end{array} \right. \quad (5.15)$$

5.4.1 Conditions inf-sup discrètes

• On rappelle que la condition inf-sup en vitesse-pression est toujours vérifiée pour les espaces de discrétisation choisis et pour Ω polygonal (voir Proposition 4.23) :

$$\inf_{q_T \in Y_T} \sup_{\mathbf{v}_T \in X_T} \frac{(q_T, \operatorname{div} \mathbf{v}_T)}{\|\mathbf{v}_T\|_{\operatorname{div}, \Omega} \|q_T\|_{0, \Omega}} \geq a \quad .$$

• Pour la condition inf-sup en tourbillon-vitesse, l'espace des tourbillons étant changé, nous devons la re-démontrer.

Proposition 5.4.1 *Condition inf-sup tourbillon-vitesse discrète.*

On suppose que Ω est un domaine polygonal convexe. Alors, il existe une constante b strictement positive, indépendante de h_T , telle que

$$\inf_{v_T \in V_T} \sup_{\varphi_T \in M_T} \frac{(\mathbf{v}_T, \mathbf{rot} \varphi_T)}{\|\mathbf{v}_T\|_{\operatorname{div}, \Omega} \|\varphi_T\|_M} \geq b \quad . \quad (5.16)$$

Remarque 5.4.2 *Notez bien que si l'on avait supposé que Γ_θ était non vide, la condition inf-sup serait encore valide : en effet, elle demande à ce que Γ_θ soit inclus dans Γ_m or ici $\Gamma_m = \Gamma$.*

Pour l'existence et l'unicité d'une solution à la formulation variationnelle discrète (5.15), la démonstration est exactement la même que celle de la Proposition 4.2.4. Seule la démonstration de la stabilité du problème auxiliaire, qui est le point clé qui ne passe que sous certaines conditions très restrictives lorsque l'on cherche le tourbillon dans un sous-espace de $H^1(\Omega)$, est un peu différente. En effet, on a changé l'espace des tourbillons pour que justement cette fois, il y ait stabilité.

5.4.2 Convergence en 2D

Il ne reste donc plus qu'à démontrer la convergence en utilisant les erreurs d'interpolation déjà étudiées dans le chapitre 3.

Théorème 5.4.3 *Convergence de la formulation variationnelle discrète 2D.*

On suppose que Ω est un domaine polygonal convexe, que le maillage \mathcal{T} appartient à une famille régulière de triangulations et que h_T est suffisamment petit. Supposons aussi que la partie du bord où on impose la vitesse normale est égale à tout Γ .

Soit (ω, \mathbf{u}, p) la solution dans $M \times X \times Y$ du problème continu (5.14) et $(\omega_T, \mathbf{u}_T, p_T)$ dans $M_T \times X_T \times Y_T$, la solution du problème discret (5.15). On suppose que la solution est telle que $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2$, avec $\operatorname{div} \mathbf{u} \in H^1(\Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$ et $\omega \in H^2(\Omega)$. Alors, il existe une constante C strictement positive, indépendante du maillage telle que

$$\begin{aligned} & \|\omega - \omega_T\|_M + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_T\|_{\operatorname{div}, \Omega} + \|p - p_T\|_{0, \Omega} \\ & \leq C h_T \left(\|\omega\|_{2, \Omega} + \|\mathbf{u}\|_{1, \Omega} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{1, \Omega} + \|p\|_{1, \Omega} \right) \quad . \end{aligned}$$

• Donnons un commentaire sur ce résultat. Si le tourbillon ω appartient à $H^{5/2}(\Omega)$, on a alors que

$$\|\omega^\Delta - \omega_\mathcal{T}^\Delta\|_{0,\Omega} \leq C h_\mathcal{T}^2 \|\omega\|_{5/2,\Omega} \quad .$$

Donc, comme Ω est supposé convexe et toujours sous les hypothèses du théorème précédent, par l'argument classique d'Aubin-Nitsche ([Aub67], [Nit68]), on obtient la régularité sur le problème adjoint et on peut attendre mieux à savoir

$$\|\omega - \omega_\mathcal{T}\|_{0,\Omega} \leq C h_\mathcal{T}^2 \|\omega\|_{5/2,\Omega} \quad . \quad (5.17)$$

5.4.3 Résultats numériques

Sur le même cas test que celui précédemment introduit ([BE79]), on vérifie que les résultats sont ceux attendus. On rappelle que la première méthode utilisait des fonctions linéaires par morceaux dans tout le domaine pour approcher le tourbillon. Le nouveau schéma remplace les fonctions linéaires par morceaux sur le bord par des fonctions harmoniques calculées par méthode intégrale. Le nombre de fonctions harmoniques est égal au nombre de sommets du maillage sur le bord du domaine. La figure 5.1 donne les valeurs du tourbillon sur le bord du domaine obtenues par l'ancien schéma et par le nouveau sur le **même** maillage. Comme pour le cas test considéré ici, le domaine est convexe et la solution très régulière, il n'est pas étonnant d'obtenir une convergence d'ordre 2 pour la norme L^2 du tourbillon comme annoncé dans les théorèmes 5.4.3 et (5.17), voir Figure 5.3. On observe aussi un ordre de convergence pour la pression en $\mathcal{O}(h_\mathcal{T})$ avec le nouveau schéma (voir encore la Figure 5.3) comme attendu par le théorème 5.4.3.

Remarque 5.4.4 *Les intégrales pour assembler la matrice de masse dans la première équation de (5.15) sont calculées à l'aide d'une formule de quadrature de Gauss à 13 points. Là encore, nous n'avons pas étudié l'erreur due à l'intégration numérique, mais elle est doit encore être au moins du même ordre que l'erreur d'interpolation et ne dégrade donc pas les résultats.*

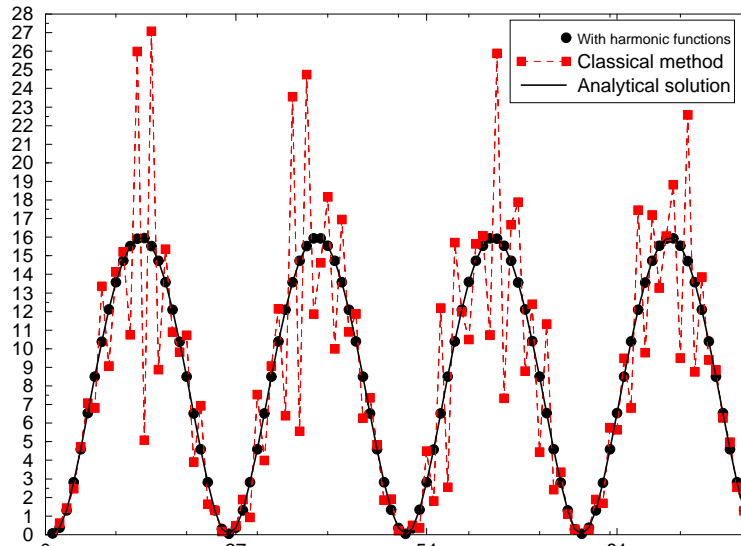


FIG. 5.1 – Comparaison : tourbillon le long du bord - Test de Bercovier-Engelman.

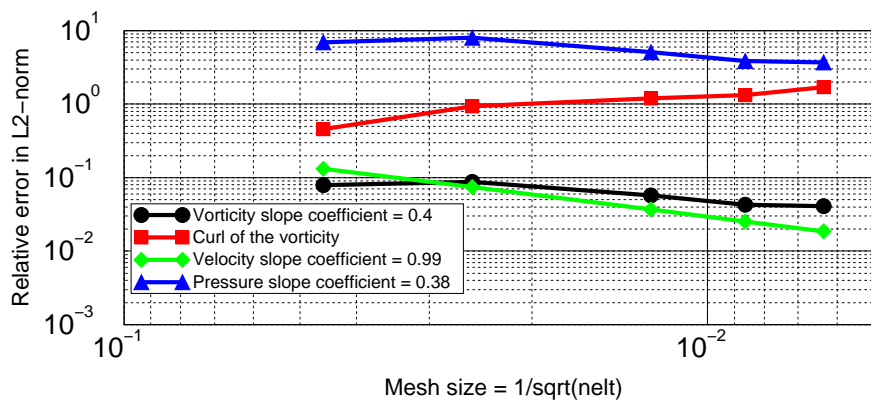


FIG. 5.2 – Courbes de convergence sans les fonctions harmoniques - Test de Bercovier-Engelman.

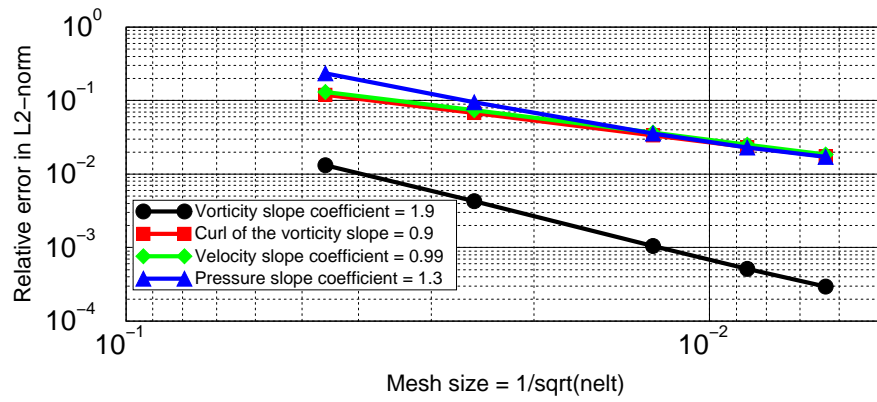


FIG. 5.3 – Courbes de convergence avec les fonctions harmoniques - Test de Bercovier-Engelman.

Chapitre 6

Extension au 3D et conclusion

On rappelle que l'on a introduit la formulation tourbillon-vitesse-pression pour étendre aux maillages non structurés la méthode MAC, méthode éprouvée depuis des années pour la simulation en mécanique des fluides. Notons aussi que la méthode MAC est une méthode aussi bien valide en 2D qu'en 3D. La question naturelle est donc : qu'en est-il de notre formulation tourbillon-vitesse-pression ?

La réponse est mitigée. La formulation est bel et bien valide en 3D mais les problèmes numériques rencontrés en 2D nous ont permis de voir qu'il fallait pour que la formulation soit un problème bien posé mathématiquement (et donc donne de bons résultats numériques) chercher le tourbillon dans un espace de fonctions peu régulières que nous avons noté $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$. Ce qui nous sauve en 2D est que cet espace s'apparente à l'espace $M(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable à laplacien dans $H^{-1}(\Omega)$ et donc possède une structure "simple" (au sens : qui s'approche facilement numériquement) puisqu'il se décompose en $H_0^1(\Omega)$ plus des fonctions harmoniques. Peut-on en dire autant de l'espace $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ en 3D ? Existe-t-il de la même façon une décomposition "simple" de cet espace en fonctions que l'on saurait approcher numériquement ? A l'heure actuelle, nous ne savons pas répondre à cette question et ne pouvons donc pas envisager du numérique sur cette formulation en 3D.

Dans la suite de ce chapitre, on résume les points clés qui permettent de montrer que le problème en 3D est mathématiquement bien posé dans l'espace $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega)$. On rappelle que l'on a réécrit la formulation variationnelle en tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes sous la forme d'un théorème abstrait (Théorème 4.4.1). Les trois hypothèses pour que ce problème soit bien posé sont : une hypothèse d'ellipticité et deux conditions inf-sup. La condition inf-sup en pression-vitesse ne pose pas de problème. Par contre la condition inf-sup en tourbillon-vitesse est difficile car elle utilise la décomposition des champs de vecteurs de $(L^2(\Omega))^N$, $N = 2$ ou 3 avec des conditions limites mêlées, on évoque les problèmes que cela pose dans la section suivante.

L'autre difficulté réside dans l'ellipticité et est étudiée dans la section encore suivante. Le produit scalaire L^2 qui correspond au problème de Stokes avec pour condition limite une condition sur la trace tangentielle du tourbillon et la composante tangentielle de la vitesse n'est hélas pas elliptique comme demandé en général. Pour avoir cette ellipticité, il est nécessaire d'utiliser pour écrire la première équation du problème de Stokes, à savoir que le tourbillon est le rotationnel de la vitesse, une forme linéaire qui donne une condition limite sur le tourbillon

dont la signification physique n'est pas comprise à ce jour.

6.1 Représentation de champs de vecteurs

Tout ce paragraphe rappelle des théorèmes sur la représentation de champs de vecteurs dont on a besoin pour démontrer la deuxième condition inf-sup qui lie tourbillon et vitesse. On trouvera les démonstrations de ces théorèmes dans différentes références, les premiers sont donnés pour des conditions homogènes sur tout le bord, on suppose alors une régularité Lipschitz ou $\mathcal{C}^{1,1}$ (voir [ABDG98] et [BDG85]). La seconde référence [Dub02], qui est celle dont on a besoin ici, est la représentation de champs de vecteurs avec conditions limites mêlées et ce théorème demande une hypothèse forte : la frontière Γ de Ω est de classe \mathcal{C}^2 . Pour avoir un intérêt pratique plus intéressant, cette hypothèse demanderait à être affaiblie dans le futur.

Donc, supposons que le bord Γ de Ω est de classe \mathcal{C}^2 (quand cette hypothèse forte pourra être affaiblie, ce sera précisé dans le texte). On suppose que Γ est décomposée en deux parties Γ_1 et Γ_2 qui forment une partition :

$$\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \quad \text{avec} \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad .$$

On introduit les espaces fonctionnels :

$$H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) = \{ \varphi \in (H^1(\Omega))^{2N-3}, \gamma\varphi \bullet n = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \gamma\varphi \times n = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \} \quad ,$$

$$M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in (L^2(\Omega))^N, \operatorname{div} \varphi = 0, \mathbf{rot} \varphi = 0 \\ \varphi \bullet n|_{\Gamma_1} = 0 \text{ dans } (H_{00}^{1/2}(\Gamma_1))^N, \varphi \times n|_{\Gamma_2} = 0 \text{ dans } (TH_{00}^{1/2}(\Gamma_2))' \end{array} \right\}$$

$$M^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in (H^1(\Omega))^N, \operatorname{div} \varphi = 0, \mathbf{rot} \varphi = 0 \\ \gamma\varphi \bullet n = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \gamma\varphi \times n = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right\} \quad ,$$

On note $\Pi_{\Gamma_1, \Gamma_2}^1$ le projecteur orthogonal de $(L^2(\Omega))^N$ sur $M^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ et $\Pi_{\Gamma_1, \Gamma_2}^0$ le projecteur de $(L^2(\Omega))^N$ sur $M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$.

Lemme 6.1.1 *On suppose que Γ est de classe \mathcal{C}^2 . Alors, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$, on a :*

$$\| \varphi \|_{1, \Omega} \leq C \left(\| \Pi_{\Gamma_1, \Gamma_2}^1 \varphi \|_{0, \Omega}^2 + \| \operatorname{div} \varphi \|_{0, \Omega}^2 + \| \mathbf{rot} \varphi \|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2} \quad .$$

La preuve est donnée dans [BDG85] quand $\Gamma_1 = \Gamma$ ou $\Gamma_1 = \emptyset$, et dans [Dub02] dans un cas plus général. Alors, on a les deux théorèmes suivants :

Théorème 6.1.2 *L'espace $M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ est de dimension finie.*

Soit Ω un ouvert borné connexe de bord Lipschitz. Si on peut choisir des coupures Σ_j , $j = 1, \dots, M$ régulières de sorte que l'intérieur de Ω , obtenue en retirant ces coupures de Ω est simplement connexe, alors l'espace $M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ est de dimension finie.

La preuve est donnée dans [FG97].

Théorème 6.1.3 *Représentation de champs de vecteurs.*

Supposons que Ω vérifie les hypothèses du Lemme 6.1.1 et soit (Γ_1, Γ_2) une partition du bord Γ . Soit $u \in (L^2(\Omega))^N$ un champ de vecteur. Alors il existe deux potentiels φ et ψ satisfaisant la condition :

$$\begin{cases} \varphi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1) & , \\ \psi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) & , \end{cases}$$

et tels que u possède la décomposition orthogonale suivante dans l'espace $(L^2(\Omega))^N$:

$$u = \nabla\varphi + \text{rot } \psi + \Pi_{\Gamma_2, \Gamma_1}^0 u \quad .$$

De plus, si on impose les conditions supplémentaires suivantes au potentiel vecteur ψ quand $N = 3$:

$$\text{div } \psi = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad , \quad \Pi_{\Gamma_1, \Gamma_2}^1 \psi = 0 \quad ,$$

ils sont uniquement et continuellement définis :

$$\exists C > 0 \quad , \quad \|\varphi\|_{1, \Omega} \leq C \|u\|_{0, \Omega} \quad , \quad \|\psi\|_{1, \Omega} \leq C \|u\|_{0, \Omega} \quad .$$

De ce théorème, dont la preuve peut être trouvée dans [FG97] et [Dub02], on déduit le lemme suivant :

Lemme 6.1.4 *Représentation de l'espace $\text{Ker}D$.*

• Si on suppose que Γ est de classe \mathcal{C}^2 , alors toute fonction de $\text{Ker}D$ peut être orthogonalement décomposée comme suit :

$$v = \text{rot } \chi + \zeta \quad ,$$

avec $\chi \in H_0^1(\Omega; \emptyset, \Gamma)$ et $\zeta = \Pi_{\Gamma, \emptyset}^0 v \in M^0(\Omega; \Gamma, \emptyset)$.

Quand Ω est connexe et simplement connexe de bord $\mathcal{C}^{1,1}$, toute fonction de $\text{Ker}D$ s'écrit

$$v = \mathbf{rot } \chi \quad , \quad \text{avec } \chi \in H_0^1(\Omega; \emptyset, \Gamma)$$

Preuve

• Comme v appartient à X donc à $(L^2(\Omega))^N$, on peut appliquer le Théorème 6.1.3 avec $\Gamma_1 = \emptyset$ et $\Gamma_2 = \Gamma$:

$$v = \nabla\varphi + \mathbf{rot } \psi + \zeta \quad ,$$

où φ , ψ , ζ sont uniquement définis dans les espaces :

$$\begin{cases} \varphi \in H_0^1(\Omega; \emptyset) = \{\varphi \in H^1(\Omega) \text{ , } (\varphi, 1)_0 = 0\} & , \\ \psi \in H_0^1(\Omega; \emptyset, \Gamma) & , \\ \zeta = \Pi_{\Gamma, \emptyset}^0 v \in M^0(\Omega; \Gamma, \emptyset) & . \end{cases}$$

• Comme la décomposition est orthogonale, le scalaire φ est défini comme la solution variationnelle de :

$$\begin{cases} \varphi \in H_0^1(\Omega; \emptyset) \\ (\nabla\varphi, \nabla\eta)_0 = (v, \nabla\eta)_0 \quad , \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega; \emptyset) & . \end{cases}$$

A l'aide de la formule de Green, on obtient, pour tout η dans $H_0^1(\Omega; \emptyset)$:

$$\begin{aligned} (v, \nabla\eta)_0 &= - \underbrace{(\text{div } v, \eta)_0}_{= 0 \text{ comme } v \in \text{Ker}D} + \langle v \bullet n, \eta \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \quad , \\ &= 0 \text{ comme } v \in \text{Ker}D \end{aligned}$$

De plus, $\langle v \bullet n, \eta \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}$ est aussi nul : v est dans X , donc $v \bullet n|_{\Gamma}$ appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$ et est nul sur tout le bord Γ . Donc φ vérifie :

$$\begin{cases} \varphi \in H_0^1(\Omega; \emptyset) \\ (\nabla \varphi, \nabla \eta)_0 = 0 \quad , \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega; \emptyset) \quad , \end{cases}$$

ce qui signifie que $\nabla \varphi$ est aussi nul. Finalement, la décomposition du vecteur v dans $X \cap \text{Ker} D$ est réduite à : $v = \mathbf{rot} \chi + \zeta$, avec $\chi \in H_0^1(\Omega; \emptyset, \Gamma)$ et $\zeta = \Pi_{\Gamma, \emptyset}^0 v \in M^0(\Omega; \Gamma, \emptyset)$.

• Quand Ω est connexe et simplement connexe de bord $\mathcal{C}^{1,1}$, $M^0(\Omega; \Gamma, \emptyset)$ est réduit à zéro (voir par exemple [ABDG98]) et la décomposition de v devient : $v = \mathbf{rot} \chi$, $\chi \in H_0^1(\Omega; \emptyset, \Gamma)$.

■

Lemme 6.1.5 *Condition inf-sup tourbillon-vitesse (4.32).*

On suppose qu'il existe une partie analytique Γ_0 de Γ telle que :

$$\text{mes}(\Gamma_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_0 \subset \Gamma_t \quad .$$

Alors, il existe une constante strictement positive b telle que :

$$\inf_{\substack{v \in \text{Ker} D \\ v \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \frac{\langle R\varphi, v \rangle_{X', X}}{\|v\|_X \|\varphi\|_W} \geq b \quad .$$

Preuve

La preuve se fait par contradiction. On suppose qu'il existe une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Ker} D$ telle que, pour tout entier k , on ait : $\|v_k\|_{\text{div}, \Omega} = \|v_k\|_{0, \Omega} = 1$, et :

$$\forall \varphi \in W \quad , \quad \langle R\varphi, v_k \rangle_{X', X} \leq \frac{1}{k} \|\varphi\|_W \quad . \quad (6.1)$$

• L'idée de la preuve est de décomposer v_k qui appartient à $(L^2(\Omega))^N \cap \text{Ker} D$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en utilisant le Théorème 6.1.3 et le lemme 6.1.4 avec $\Gamma_1 = \Gamma_t$ et $\Gamma_2 = \Gamma_\theta$: $v_k = \mathbf{rot} \psi_k + \xi_k$, avec $\psi_k \in H_0^1(\Omega; \Gamma_t, \Gamma_\theta)$ et $\xi_k = \Pi_{\Gamma_\theta, \Gamma_t}^0 v_k \in M^0(\Omega; \Gamma_\theta, \Gamma_t)$.

• On commence par démontrer que $\mathbf{rot} \psi_k$ tend vers zéro dans $(L^2(\Omega))^N$. Puis que la suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans l'espace $M^0(\Omega; \Gamma_\theta, \Gamma_t)$ de dimension finie tend vers un ξ dont on démontre en utilisant l'hypothèse d'analyticité qu'il est nul. Tous les détails sur cette preuve sont dans l'article [DSS03a] ■

Lemme 6.1.6 *Condition inf-sup tourbillon-vitesse (4.32) quand Ω est un ouvert connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^N .*

On suppose que Ω ouvert connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^N dont la frontière Γ est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Alors, il existe une constante strictement positive b telle que :

$$\inf_{\substack{v \in \text{Ker} D \\ v \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \frac{\langle R\varphi, v \rangle_{X', X}}{\|v\|_X \|\varphi\|_W} \geq b \quad .$$

Preuve

Dans le cas particulier d'un connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^N dont la frontière Γ est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, on peut utiliser la deuxième partie du Lemme 6.1.4 : il existe $\chi \in H_0^1(\Omega; \emptyset, \Gamma)$ tel que $v = \text{rot } \chi$ et vérifiant $\|\chi\|_{1,\Omega} \leq C_0 \|v\|_{0,\Omega}$. Comme χ appartient à $H(\text{rot}, \text{div}^*, \Omega) \cap H_0^1(\Omega; \emptyset, \Gamma)$ alors $R \chi$ est égal à **rot** χ dans $(H_0(\text{div}, \Omega))'$. Donc, pour tout v dans $\text{Ker } D$, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \frac{\langle R\varphi, v \rangle_{X',X}}{\|v\|_X \|\varphi\|_W} &\geq \frac{(\text{rot } \chi, v)_0}{\|v\|_X \|\chi\|_W} = \frac{\|v\|_{0,\Omega}^2}{\|v\|_X \|\chi\|_W} = \frac{\|v\|_{0,\Omega}^2}{\|v\|_{0,\Omega} \|\chi\|_W} \\ &\geq \frac{\|v\|_{0,\Omega}}{C \|\chi\|_{1,\Omega}} \\ &\geq \frac{1}{CC_0}, \end{aligned}$$

qui est la condition inf-sup cherchée. ■

On voit dans les deux cas que toute la difficulté est bien de se débarrasser des singularités qui apparaissent dans la représentation des champs de vecteurs quand les conditions limites sont mêlées. Numériquement, ces difficultés se traduisent par les mauvais résultats obtenus sur des maillages non structurés car les singularités ne peuvent pas être bien représentées par des fonctions polynomiales. Le schéma numérique doit d'une façon ou d'une autre prendre en compte ces singularités. C'est bien ce que nous avons montré puisqu'en rajoutant les fonctions harmoniques dans le schéma, on obtient ainsi de bons résultats numériques.

6.2 Le problème de l'ellipticité

Le deuxième problème que l'on rencontre est l'ellipticité de la forme linéaire qui apparaît dans la première équation du problème de Stokes. Cette équation s'écrit en effet :

$$J\omega = R'u \text{ in } W', \quad u \in X, \quad \omega \in W.$$

Plusieurs choix possibles de l'opérateur de masse J sont possibles.

- Le premier est le produit scalaire L^2 qui redonne bien, quand on l'interprète la première équation du problème de Stokes $\omega = \text{rot } u$ et la condition limite classique sur la trace tangentielle du tourbillon $\omega \times n = 0$ sur Γ_θ . Le problème est que cet opérateur **n'** est en général **pas** elliptique sur V comme demandé (4.33).

- Introduisons maintenant un nouvel opérateur le "co-rot" $\rho : W \rightarrow X$ qui va nous permettre d'aisément manipuler le rotationnel de fonctions de W comme des fonctions de $H_0(\text{div}, \Omega)$, dont la trace normale est nulle sur le bord. La propriété remarquable de cet opérateur ρ est que $\text{div}(\rho\varphi)$ est bien défini pour $\varphi \in W$ mais n'est pas nul en général!

Soit φ dans W . Par définition, $R\varphi$ appartient à X' . Comme X est un espace de Hilbert, en appliquant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet (voir par exemple [Bre93]) à $R\varphi$, pour tout $\varphi \in W$, il existe un unique $\rho\varphi \in X$ tel que pour tout $v \in X$:

$$\langle R\varphi, v \rangle_{X',X} = (\rho\varphi, v)_{\text{div}} = (\rho\varphi, v)_0 + (\text{div } \rho\varphi, \text{div } v)_0 \quad . \quad (6.2)$$

De plus, pour tout φ dans W , on a : $\|R\varphi\|_{X'} = \|\rho\varphi\|_{\text{div},\Omega}$.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_W^2 &= \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\rho\varphi\|_{\text{div},\Omega}^2 \\ \|\varphi\|_W^2 &= \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\rho\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } \rho\varphi\|_{0,\Omega}^2 \quad . \end{aligned}$$

Définition 6.2.1 *Opérateur de projection de Leray et opérateur K .*
 Considérons $v \in X = H_0(\text{div}, \Omega)$ et sa décomposition orthogonale :

$$v = v_1 + v_2 \in \text{Ker } D \oplus (\text{Ker } D)^\perp .$$

Alors, on définit les deux opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} L : X \ni v &\longmapsto Lv = v_1 \in \text{Ker } D , \\ K : X \ni v &\longmapsto Kv = v_2 \in (\text{Ker } D)^\perp . \end{aligned}$$

Remarquez que L est l'opérateur de projection de Leray (voir Leray [Ler34]).

La deuxième possibilité pour l'opérateur J est alors de prendre

$$\langle J\omega, \varphi \rangle_{W', W} = \langle J_1\omega, \varphi \rangle_{W', W} \equiv (\omega, \varphi)_W ,$$

où on rappelle que :

$$(\omega, \varphi)_W = (\omega, \varphi)_0 + (L\rho\omega, L\rho\varphi)_0 + (K\rho\omega, K\rho\varphi)_0 + (\text{div } K\rho\omega, \text{div } K\rho\varphi)_0 .$$

Là encore, cet opérateur \mathbf{n}' est en général **pas** elliptique sur V .

• En un sens, l'opérateur "minimum" qui nous donne l'ellipticité sur V sans autre condition sur le domaine Ω est l'opérateur suivant : $\langle J\omega, \varphi \rangle_{W', W} = \langle J_2\omega, \varphi \rangle_{W', W}$, avec :

$$\langle J_2\omega, \varphi \rangle_{W', W} = (\omega, \varphi)_0 + (K\rho\omega, K\rho\varphi)_0 + (\text{div } K\rho\omega, \text{div } K\rho\varphi)_0 .$$

Le terme supplémentaire $(K\rho\omega, K\rho\varphi)_0 + (\text{div } K\rho\omega, \text{div } K\rho\varphi)_0$ est en fait un terme de bord (il disparaît pour des fonctions régulières) et il est associé à une condition limite non classique (qui apparaît mathématiquement mais n'est pas contenue dans le modèle) comme montré dans la proposition suivante [DSS03a] :

Proposition 6.2.2 *Une nouvelle condition limite pour le problème de Stokes.*

Sous les hypothèses soit du Lemme 6.1.5, soit du lemme 6.1.6, la solution $(\omega, u, p) \in W \times X \times Y$ du problème (5.10) est telle que la vitesse u appartient à $H(\mathbf{rot}, \Omega)$. De plus, la solution vérifie formellement les conditions limites suivantes de

- non pénétrabilité, $u \bullet n = 0$ sur Γ ,
- tourbillon tangentiel imposé sur une partie Γ_θ du bord $\omega \times n = 0$ on Γ_θ ,
- et une nouvelle condition qui couple vitesse tangentielle et tourbillon :

$$u \times n|_{\Gamma_t} = \mathbf{rot}_\Gamma \gamma\chi \text{ on } \Gamma_t, \tag{6.3}$$

où χ est associé au tourbillon ω par la relation :

$$\begin{cases} \Delta\chi = \text{div}(\rho\omega) & \text{dans } \Omega , \\ \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma , \end{cases} \tag{6.4}$$

dans laquelle $\rho\omega$ est le représentant de Riesz de $R\omega$ dans l'espace X et $\mathbf{rot}_\Gamma \gamma\chi = \gamma(\nabla\chi) \times n$, est le rotationnel surfacique (voir [CB68]).

Nous avons mis beaucoup de temps à comprendre comment se traduisait cette hypothèse d'ellipticité pour le numérique mais nous pensons maintenant qu'elle est liée à une décomposition du nouvel espace de tourbillon W . En effet, pour pouvoir l'approcher numériquement, il faut pouvoir le décomposer en des fonctions régulières plus des fonctions singulières (ces fonctions singulières jouant le rôle des fonctions harmoniques du 2D). Ces dernières ne sont alors rien d'autre en 3D que les fonctions telles que la divergence de leur "co-rotationnel" est nulle et donc celles pour lesquelles l'ellipticité de la forme linéaire est évidente (tout comme en 2D, la norme M des fonctions harmoniques se réduit à la norme L^2 , et permet alors de montrer l'ellipticité de la forme linéaire). Il faut donc pour le numérique de cette formulation pouvoir identifier ces fonctions à co-rotationnel à divergence nulle.

6.3 Conclusion

Pour conclure, récapitulons les cas étudiés dans ce manuscrit. On rappelle les partitions de la frontière du domaine pour imposer les conditions limites :

$$\Gamma = \overline{\Gamma_m} \cup \overline{\Gamma_p} \quad \text{avec} \quad \Gamma_m \cap \Gamma_p = \emptyset \quad ;$$

$$\Gamma = \overline{\Gamma_\theta} \cup \overline{\Gamma_t} \quad \text{avec} \quad \Gamma_\theta \cap \Gamma_t = \emptyset \quad .$$

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_m$$

$$p = \Pi_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_p$$

$$\omega \times n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\theta$$

$$n \times u \times n = \sigma_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_t \quad ,$$

6.3.1 En 2d

La formulation tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes bidimensionnel donne de bons résultats numériques dans les cas suivants :

- Sur des maillages structurés, dans tous les cas de conditions limites !
- Sur des maillages non structurés, si le tourbillon et la vitesse normale sont imposés sur une même partie de la frontière du domaine ($\Gamma_\theta = \Gamma_m$) et si le domaine est suffisamment régulier pour qu'il n'y ait pas de singularité ($M^0(\Omega; \Gamma_m, \Gamma_p) = \emptyset$), convexe par exemple.
- Sur des maillages non structurés, si la vitesse normale est imposée sur tout le bord et que le tourbillon est discrétisé à l'aide de fonctions harmoniques sur le bord du domaine.
- Probablement (non testé ici), sur des maillages non structurés, avec un tourbillon imposé sur une partie $\Gamma_\theta \subset \Gamma$ de la frontière. Pour cela, on utiliserait des fonctions harmoniques que sur le complémentaire de Γ_θ . Il faudrait réfléchir aux éventuels problèmes théoriques que cela pourrait poser.

Citons ici les travaux qui ont été menés depuis par C. Bernardi et ses co-auteurs ([BC06, ABC07]) dans lesquels est démontré d'une autre façon le caractère bien posé de la formulation tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes en 2D (comme en 3D) dans le cas où les conditions limites sont telles que le tourbillon et la vitesse normale sont imposés sur tout le bord du domaine ($\Gamma_\theta = \Gamma_m = \Gamma$). On y trouvera d'ailleurs des extensions du caractère bien posé dans le cas mutiplement connexe de la frontière du domaine et pour le problème de Navier-Stokes [ABC06, AAB⁺07].

6.3.2 En 3d

Comme précisé plus haut, le numérique est actuellement hors de portée car le problème n'est bien posé que lorsque l'on cherche le tourbillon dans l'espace $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$ que l'on ne sait pas discrétiser. Néanmoins les résultats sont les suivants : la formulation variationnelle en tourbillon-vitesse-pression est bien posé

1. si le domaine est connexe, simplement connexe, de frontière $\mathcal{C}^{1,1}$ et la vitesse normale imposée sur tout le bord *i.e.* $\Gamma_m = \Gamma$
2. ou si le domaine est seulement connexe mais de frontière de classe \mathcal{C}^2 , la vitesse normale imposée sur tout le bord *i.e.* $\Gamma_m = \Gamma$ et s'il existe une partie de mesure non nulle Γ_0 de Γ_t (partie du bord où on impose la vitesse tangentielle) **analytique**. Ce qui signifie que toute la vitesse est connue sur une partie du bord analytique.

Mais dans ces deux cas, les conditions limites que l'on doit considérer sont les suivantes :

•

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

•

$$\omega \times n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\theta$$

$$u \times n = \text{rot}_\Gamma \gamma \chi \quad \text{sur } \Gamma_t \quad ,$$

où χ est une fonction scalaire liée au tourbillon par la relation :

$$\begin{cases} \Delta \chi = \text{div}(\rho \omega) & \text{dans } \Omega \quad , \\ \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \quad , \end{cases}$$

dans laquelle $\rho \omega$ est le représentant de Riesz de $R\omega$ dans l'espace $X = H_0(\text{div}, \Omega)$ ($R\omega$ étant l'extension du rotationnel pour les fonctions de $H(\mathbf{rot}, \text{div}^*, \Omega)$). Notez bien que si le tourbillon appartenait à l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$, $\rho \omega$ s'apparenterait à $\text{rot } \omega$ et on aurait donc que χ serait nul, soit la condition limite classique de vitesse tangentielle ! A l'heure actuelle, nous ne savons pas interpréter physiquement cette condition limite.

En d'autres termes, la formulation variationnelle en tourbillon-vitesse-pression bien posée en 3D n'est pas exactement le problème de Stokes avec les conditions limites classiques.

Deuxième partie

Chapitre 7

Introduction

Dans la seconde partie de ce manuscrit, on s'intéresse au problème de la simulation numérique des équations cinétiques, type équation de Vlasov d'une part, des équations de l'électromagnétisme d'autre part et surtout au couplage de ces deux problèmes. En effet, dans le cadre du projet INRIA **CALVI** (CALcul scientifique et VISualisation) bilocalisé entre Nancy et Strasbourg et créé par Eric Sonnendrücker en 2003, le travail porte sur le développement et l'analyse de méthodes de simulation numérique de problèmes de physique des plasmas ou de faisceaux de particules chargées, à savoir le modèle de Vlasov-Maxwell et sa version simplifiée le modèle de Vlasov-Poisson.

Une des applications en physique des plasmas est l'étude de la stabilité et de l'équilibre des plasmas, en particulier pour la fusion contrôlée que l'on cherche à réaliser pour fournir de l'énergie dans le cadre de projets civils tel ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) au CEA-Cadarache ou militaires tel le Laser MégaJoule (LMJ) au CESTA à Bordeaux. On peut aussi s'intéresser, par exemple pour l'endommagement de matériels spatiaux soumis à des faisceaux de particules chargés, à l'étude des plasmas et des faisceaux de particules présents dans l'espace. Un autre application est la construction et l'étude des accélérateurs de particules.

On rappelle qu'un plasma, souvent appelé quatrième état de la matière, est en fait un gaz ionisé globalement neutre, constitué de particules neutres et chargées qui réagissent à la fois entre elles et à la présence d'un champ électromagnétique. Hors équilibre thermodynamique qui est atteint grâce aux collisions entre particules, le comportement d'un plasma ne peut pas toujours être assimilé à celui d'un fluide.

Les plasmas et les faisceaux de particules chargées sont modélisés par une fonction statistique dite fonction de distribution qui représente la probabilité de présence de particules en un point de l'espace des phases. Cette fonction est alors solution de l'équation de Vlasov qui fait intervenir un champ électromagnétique créé par les particules chargées, lui-même solution des équations de Maxwell. Sous certaines hypothèses, le modèle peut être réduit au problème de l'équation de Vlasov couplée à une équation de Poisson. Dans l'étude de méthodes numériques pour résoudre ces problèmes de type Vlasov-Poisson ou Vlasov-Maxwell, deux axes de recherche peuvent être dégagés. D'abord la résolution de l'équation de Vlasov en elle-même est un défi, car elle possède la particularité d'être posée dans l'espace des phases, et donc en 3D

posée dans \mathbb{R}^6 . Ensuite son couplage avec les équations de Maxwell oblige alors à privilégier certaines méthodes de résolution pour ces dernières. Nous allons nous consacrer dans cette partie du manuscrit à ces deux grands axes de recherche : la résolution de l'équation de Vlasov et la résolution des équations de Maxwell.

Premièrement, pour résoudre l'équation de Vlasov, on peut dégager deux grandes méthodes que l'on va étudier par la suite : la méthode particulaire dite PIC (pour Particle In Cell) et la résolution directe. Chacune des deux méthodes présentent des avantages et des inconvénients.

La première méthode est la méthode PIC qui consiste à suivre la trajectoire de grands ensembles de particules -des macro-particules- qui décrivent le plasma dans l'espace des phases. Pour cela on se donne une distribution initiale *i.e.* une collection de N macro-particules de position et vitesse aléatoires que l'on fait évoluer de façon déterministe suivant l'équation de Vlasov. L'avantage de cette méthode, qui en fait la méthode encore préférée à l'heure actuelle, est qu'elle est indépendante de la dimension du domaine et donc en particulier très compétitive en dimension 3. Son principal défaut est que la distribution initiale étant aléatoire, c'est une méthode bruitée et qui converge donc très lentement en fonction du nombre de macro-particules. Enfin, la plupart des (macro-)particules se regroupent évidemment dans les endroits où la probabilité de trouver des particules est grande, ce qui rend difficile d'obtenir le bon comportement dans les régions à faible densité, comme les queues de distribution ou halos, où pourtant des phénomènes physiques importants ont lieu.

La deuxième méthode, introduite très tôt dans les années 70 pour résoudre des problèmes 1D (=2D de l'espace des phases) a vite été abandonnée au profit des méthodes particulières dès que l'on est passé en dimensions supérieures, puisqu'elle demande un maillage de l'espace des phases et donc un nombre de points qui explose lorsque l'on monte en dimension. Mais depuis quelques années, grâce à l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs, la simulation de l'évolution des plasmas et des faisceaux de particules basée sur une résolution directe de l'équation de Vlasov sur un maillage de l'espace des phases redevient une alternative aux méthodes particulières habituellement employées. De plus, la force de ces simulations directes réside dans le fait qu'elles ne sont pas bruitées (contrairement aux méthodes PIC) et que l'approximation est de même résolution sur tout l'espace des phases, en particulier dans les régions à faible densité de particules. L'inconvénient principal est que beaucoup de ces (déjà très) nombreux points sont inutiles car la fonction de distribution des particules y est nulle, ce qui rend ces méthodes directes coûteuses en temps de calcul. C'est particulièrement vrai pour la simulation des faisceaux de particules où le faisceau bouge rapidement dans l'espace des phases. Pour pallier cet inconvénient, on peut penser à deux méthodes soit un maillage adaptatif, ce qui permet de diminuer le nombre de points en n'en mettant que là où ils sont nécessaires (voir les travaux [GHPS04] par exemple) soit celle dont on va parler ici, à savoir un maillage mobile qui suit la forme de la fonction de distribution et permet de ne mailler que la partie de l'espace des phases sur laquelle celle-ci est *a priori* non nulle.

Après une introduction des systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell, on étudie dans le chapitre 9 une méthode directe sur un maillage de l'espace des phases introduite par [CK76] et Sonnendrücker *et al.* [SRBG99], la méthode semi-lagrangienne dont on cherche à diminuer le coût en travaillant sur un maillage mobile. Les premiers résultats en 1D (= 2D dans l'espace des phases) obtenus par E. Sonnendrücker et E. Oudet ont été publiés dans [SFF⁺04]. En

2006, avec N. Crouseilles, nous avons utilisé avec succès cette méthode de maillage mobile en 1D afin de simuler un problème d'interaction laser-plasma. Nous avons travaillé sur un code semi-lagrangien écrit par A. Ghizzo (Laboratoire de Physique des Milieux Ionisés et Applications, Nancy) qui étudie l'interaction entre un laser et un plasma. Pour cette simulation directe sur maillage de l'espace des phases, il est nécessaire de mailler une grille importante afin de prendre en compte les instabilités qui vont se produire et de la mailler finement sinon les instabilités attendues ne se déclenchent pas. Donc lors d'une grande partie du temps de simulation, tant que les instabilités n'ont pas démarré, beaucoup de points de la grille sont inutiles car la fonction de distribution y est nulle. Nous introduisons donc un maillage mobile de l'espace des phases qui suit parfaitement le développement de ces instabilités et permet de réduire drastiquement le temps de calcul (de 8h30 à 2h30). Ces résultats très prometteurs laissaient envisager un passage bénéfique aux dimensions supérieures. Donc, toujours avec N. Crouseilles, nous avons appliqué le même genre d'algorithme au code de calcul LOSS qui résout les équations de Vlasov-Poisson en 2D (= 4D dans l'espace des phases) à l'aide de splines locaux [CLS07]. On aboutit alors aux premiers résultats d'une méthode de maillage mobile en 4D. Nous ne détaillerons pas ici la méthode de LOSS (dont on trouvera tous les détails dans [CLS07]) mais seulement l'adaptation de la méthode au maillage mobile. La méthode a ensuite encore été optimisée en couplant méthode de parallélisation du domaine des positions et maillage mobile dans le domaine des vitesses. On rappellera rapidement la méthode de maillage mobile et ces deux résultats dans le chapitre 9 de ce manuscrit.

Dans le chapitre 10, on se consacre à la résolution numérique des équations de Maxwell par la méthode des éléments finis conformes. En effet, on souhaite avoir des solveurs de Maxwell efficaces et très précis et ce, pour des géométries complexes. Donc nous allons avoir besoin de méthodes d'ordre élevé et de maillages non structurés, d'où le choix des méthodes d'éléments finis, avec lesquelles on peut facilement monter en ordre et gérer les maillages non structurés (par opposition aux méthodes de type différences finis comme le solveur de Yee [Yee66] par exemple). En fait, nous avons d'abord regardé le même type de solveur pour les équations de l'acoustique dans le cadre du projet franco-allemand DFG-CNRS "Noise Generation in Turbulent Flows" que nous menons en collaboration avec l'équipe de l'IAG de Stuttgart. L'objectif est ici de coupler les équations de l'acoustique et les équations de fluide afin de trouver la source et d'évaluer le bruit produit par les écoulements de fluides turbulents. Les caractéristiques voulues du solveur d'acoustique dont nous étions chargés sont donc les mêmes, à savoir très précis et en maillages non structurés, d'où le choix de méthodes d'éléments finis. Nous avons ensuite utilisé notre expérience pour les solveurs de Maxwell, cette fois dans le cadre d'un projet ANR (ANR-06-CIS6-013-01) dénommé HOUPIC (High Order finite element Particle-In-Cell solvers on Unstructured grids) dont l'objectif est de coupler un solveur Maxwell 3D éléments finis d'arêtes d'ordre élevé à un code PIC pour résoudre l'équation de Vlasov en trois dimensions d'espace (= 6D de l'espace des phases). Le point commun, et le gros défaut, des solveurs éléments finis de Maxwell et d'acoustique lorsqu'on résout ces équations dans le domaine temporel est d'avoir une matrice de masse à inverser à chaque pas de temps, d'où un coût élevé. Un moyen simple de le diminuer est d'avoir des matrices de masse diagonales, d'où la technique dite de condensation de masse, introduite par G. Cohen et P. Joly [Coh01, EJ97] qui rend ces matrices diagonales en choisissant correctement les degrés de liberté de la méthode.

Dans le cadre du couplage entre un solveur Maxwell et un solveur PIC, deux points

sont importants. Premièrement, les éléments finis utilisés pour le solveur Maxwell ne doivent absolument pas créer de modes numériques (dits “spurious modes”) non physiques car ceux-ci seront grandement amplifiés par le bruit numérique inhérent aux simulations PIC. D’où le choix de méthode conforme et donc le choix d’éléments d’arêtes qui sont les éléments conformes dans l’espace naturel du champ électrique $H(\text{rot})$ et qui ont été introduits par Nédélec [Néd80]. Le problème de condensation de masse de ce genre d’éléments est délicat sur des maillages triangulaires ou tétraédriques donc non structurés, mais relativement facile sur les maillages structurés. Nous choisissons donc de travailler sur des maillages hybrides où une grosse partie du domaine est maillée de façon structurée, ce qui permet d’utiliser la condensation de masse. Evidemment, toutes les contraintes de conformité vont guider notre choix des éléments d’arêtes. Ensuite, nous travaillons non seulement sur des méthodes d’ordre élevé en espace mais aussi en temps et nous introduisons alors des schémas en temps d’ordre élevé. Nous comparons des schémas symplectiques qui par définition conservent l’énergie présente dans le problème et des schémas basés sur un développement de Taylor [DM05b, DM05a], schémas qui doivent dans certains cas être stabilisés. Nous avons mené une importante étude numérique afin d’obtenir les solveurs Maxwell les plus efficaces et les plus précis possibles. Pour cela, nous comparons les erreurs de dissipation et de dispersion des différents schémas en espace et en temps et mesurons leur efficacité, *i.e.* le temps de calcul et la finesse du maillage nécessaires à l’obtention d’une solution avec une erreur donnée.

Le deuxième point important à considérer lors du couplage d’un solveur Maxwell et d’un solveur PIC est l’équation de conservation de la charge qui doit être vérifiée au niveau numérique à chaque pas de temps afin de garantir que les solutions sont bien les solutions physiques des équations de Maxwell. Cette équation de conservation de la charge implique les densités de courant et de charge, obtenues à partir de la fonction de distribution solution de l’équation de Vlasov, et qui rentrent comme données du problème de Maxwell. Ce qui implique que le courant obtenu à partir de l’évolution de l’équation de Vlasov doit être calculé d’une façon bien particulière. Les derniers résultats de cette recherche encore en cours seront détaillés dans le chapitre 10.

Les travaux présentés dans cette partie correspondent aux publications suivantes.

- [CGS07] N. Crouseilles, A. Ghizzo, S. Salmon.
Vlasov laser-plasma interaction simulations in the relativistic regime with a moving grid,
2007.
Rapport de Recherche INRIA 6109.
- [JS07] S. Jund, S. Salmon,
Arbitrary high order finite element schemes and high order mass-lumping,
Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Volume 17, n 3 (2007).
- [JSS08] S. Jund, S. Salmon, E. Sonnendrücker
High order conforming finite-element discretisation of the Maxwell equations,
A soumettre, 2008.
- [CPJSS08] M. Campos-Pinto, S. Jund, S. Salmon, E. Sonnendrücker
A General Formulation for Electromagnetic PIC Codes,
A soumettre, 2008.
- [CPS08] M. Campos-Pinto, S. Salmon
Méthodes numériques en électromagnétisme,
Cours de M2, 2007-2008.

Chapitre 8

Les équations de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell

8.1 Les équations de Maxwell

Pour caractériser la force gravitationnelle s'exerçant sur un corps, on associe à ce corps une masse; de manière similaire, pour traduire l'état d'électrisation d'un corps on lui associe une charge électrique. L'électromagnétisme est l'étude des phénomènes électriques et magnétiques provoqués par le mouvement de corps chargés électriquement. Les équations de l'électromagnétisme sont appelées équations de Maxwell.

La charge élémentaire est notée e et vaut $1,602 \cdot 10^{-19} A \cdot s$ (Ampère.seconde ou Coulomb = C). L'électron a une charge électrique q égale à $-e$ et le proton à $+e$. Les atomes non ionisés sont neutres ($q = 0$).

Tout corps chargé électriquement modifie les caractéristiques physiques de l'espace l'environnant (on dit « toute charge électrique crée un **champ électrique** ») d'où la création de forces d'attraction ou de répulsion s'exerçant sur deux charges électriques voisines. Ces charges sont alors mises en mouvement par ces forces. Or tout mouvement de charge électrique (qu'on appelle **courant**) crée un **champ magnétique**.

Remarque 8.1.1 *De la même façon qu'aucune force gravitationnelle ne s'exerce sur un corps de masse nulle, aucune force électrique ne s'exerce sur un corps neutre.*

Dans la suite, nous allons donc considérer quatre champs (donc 4 vecteurs) :

E : champ électrique.

D : champ de déplacement ou d'induction électrique.

H : champ magnétique.

B : champ d'induction magnétique (souvent appelé par abus de langage champ magnétique dans la suite).

Les champs **D**[$A \cdot s/m^2$] et **H**[A/m] sont des champs de calcul, **E**[V/m] et **B**[$V \cdot s/m^2$] = [T (Tesla)] sont les champs mesurables donc physiques et les seuls qui vont apparaître dans la suite.

8.1.1 En 3D

Les champs $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ sont des applications $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B} : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = -\mathbf{J} \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (8.2)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (8.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (8.4)$$

L'équation (8.1) est appelée équation d'Ampère¹ ou parfois équation d'Ampère-Maxwell, elle signifie qu'une variation du champ électrique crée un champ magnétique. L'équation (8.2) est appelée équation de Faraday² et traduit le fait qu'une variation du champ magnétique crée un champ électrique. L'équation (8.3) est la loi de Gauss³ et signifie qu'une charge électrique crée un champ électrique, c'est-à-dire qu'il existe des monopôles électriques (dits charges électriques). Enfin, l'équation (8.4), appelée loi de Gauss magnétique traduit le fait qu'il n'existe pas de charge magnétique monopolaire.

Le champ $\mathbf{J} : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est appelé **densité de courant**, il est non nul dès qu'il y a déplacement de charges électriques (autrement dit dès qu'il y a courant électrique).

La **densité de charge électrostatique** notée $\rho : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ résulte de la présence de charges électriques.

Pour fermer ce système, il faut ajouter des **lois de comportement** qui décrivent la nature du milieu dans lequel les phénomènes ont lieu. Ces lois de comportement nécessitent des hypothèses sur ce milieu :

1. Milieu parfait : la loi reliant \mathbf{D} et \mathbf{E} et \mathbf{H} et \mathbf{B} est locale en espace et en temps *i.e.* $\mathbf{D}(t, x)$ ne dépend que de $\mathbf{E}(t, x)$ et $\mathbf{B}(t, x)$ ne dépend que de $\mathbf{H}(t, x)$.
2. Milieu isotrope : la loi reliant \mathbf{D} et \mathbf{E} et \mathbf{H} et \mathbf{B} est indépendante de la direction.
3. En première approximation, ces lois sont linéaires.

Sous ces trois hypothèses, les lois de comportement du milieu s'écrivent alors :

$$\mathbf{D}(t, x) = \varepsilon(x)\mathbf{E}(t, x) \quad (8.5)$$

$$\mathbf{B}(t, x) = \mu(x)\mathbf{H}(t, x) \quad (8.6)$$

La fonction $\varepsilon(x)$ est appelée **permittivité électrique ou diélectrique**, $\mu(x)$ la **perméabilité magnétique**.

Si l'on suppose que le milieu est de plus **homogène**, la permittivité électrique et la perméabilité magnétique sont constants. Par exemple, le vide est un milieu homogène :

$$\varepsilon(x) \equiv \varepsilon_0, \quad \mu(x) \equiv \mu_0.$$

¹André Marie Ampère, français 1775-1836

²Michael Faraday, anglais 1791-1867

³Carl Friedrich Gauss, allemand 1777-1855

La vitesse de la lumière dans le vide est donnée par $c_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ et vaut $3.10^8 m/s$, ε_0 est alors égal à $(36\pi.10^9)^{-1} = 8,85.10^{-12} C/V.m$ et μ_0 à $4\pi.10^{-7} V.s/A.m$.

Remarque 8.1.2 *Un milieu quelconque est souvent caractérisé relativement au vide :*

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x), \quad \mu(x) = \mu_0 \mu_r(x).$$

On définit alors l'indice du milieu :

$$n(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon(x)\mu(x)}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r(x)\mu_r(x)},$$

d'où en posant $\varepsilon(x)\mu(x)c^2(x) = 1$, la vitesse de la lumière dans le milieu est donnée par $c(x) = \frac{c_0}{n(x)}$.

D'où l'on déduit que plus l'indice du milieu est élevé, plus les ondes électromagnétiques s'y propagent lentement.

Les équations de Maxwell qui nous intéressent ici, s'écrivent alors dans le vide :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c_0^2 \mathbf{rot} \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (8.8)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (8.9)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \quad (8.10)$$

Les équations de Maxwell étant des équations d'évolution, il est évident qu'elles doivent être complétées par des conditions initiales du type :

$$\mathbf{E}(0, x) = \mathbf{E}_0(x), \quad \mathbf{B}(0, x) = \mathbf{B}_0(x).$$

Les hypothèses sur \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 seront données ultérieurement.

De plus, si les équations de Maxwell sont posées dans un domaine borné, il faudra y adjoindre des conditions limites ou conditions de bord.

Les équations de Maxwell avec lesquelles on va travailler par la suite doivent donc se lire dans

le vide :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial t} - c_0^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) &= -\frac{J_x}{\varepsilon_0} \\
\frac{\partial E_y}{\partial t} - c_0^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) &= -\frac{J_y}{\varepsilon_0} \\
\frac{\partial E_z}{\partial t} - c_0^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) &= -\frac{J_z}{\varepsilon_0} \\
\frac{\partial B_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) &= 0 \\
\frac{\partial B_y}{\partial t} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) &= 0 \\
\frac{\partial B_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) &= 0 \\
\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Remarque 8.1.3 *On remarque que l'on est en présence de 12 inconnues scalaires (4 inconnues vectorielles $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$) et de 14 équations (2 équations vectorielles, 2 équations scalaires et 2 relations constitutives du milieu). Il y a donc 2 équations redondantes. En effet, prenons formellement la divergence de (8.2), on obtient :*

$$\frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{B}}{\partial t} + \underbrace{\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \mathbf{E}}_{\equiv 0} = 0,$$

donc si cette équation est vérifiée à l'instant initial, elle sera vérifiée en tout temps. Donc (8.4) est redondante. Il en sera de même pour (8.3), nous y reviendrons plus tard.

8.1.2 En 2D

Même si l'extension au 3D est en cours, on va se concentrer dans la suite de ce manuscrit aux équations bi-dimensionnelles, et donc à celles qui sont rappelées dans cette section. Le « système des ondes transverses électriques » correspond à la situation où le champ électromagnétique est invariant par translation dans une direction (par exemple z). On peut penser au cas où le champ est créé (au travers de ρ et \mathbf{J}) par des particules chargées qui ne se déplacent que dans des plans parallèles à (x, y) (donc $(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{v}_i)$ vecteurs position et vitesse de la particule i sont orthogonaux au vecteur \mathbf{e}_z). Comme chaque particule $(\mathbf{x}_i(t), q_i)$ est soumise à une force de Lorentz

$$\mathbf{F}_i(t) = q_i(\mathbf{E}(t, \mathbf{x}_i) + \mathbf{B}(t, \mathbf{x}_i) \times \mathbf{v}_i),$$

on voit que \mathbf{E} et $\mathbf{B} \times \mathbf{v}_i$ doivent appartenir au plan (x, y) . Donc

$$\mathbf{E}(t, x, y, z) = \mathbf{E}(t, x, y) = \begin{pmatrix} E_x(t, x, y) \\ E_y(t, x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme $\mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$ est aussi dans ce plan, on en déduit que \mathbf{B} est dirigé suivant l'axe z . D'où

$$\mathbf{B}(t, x, y, z) = \mathbf{B}(t, x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(t, x, y) \end{pmatrix}.$$

On en déduit la forme suivante pour les équations de Maxwell (8.11) (toujours dans le vide pour simplifier), appelées alors « **Equations de Maxwell 2D** » (ou « **mode Transverse Electrique** », car le champ \mathbf{E} est alors transverse à la direction d'invariance z) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} &= -\frac{J_x}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\frac{J_y}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (8.12)$$

en rappelant que les fonctions ne dépendent à présent plus que de (t, x, y) , (d'où la disparition de la dernière équation $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$)

On peut aussi trouver le **mode Transverse Magnétique** où les rôles de E et B sont inversés (donc où $(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{v}_i)$ vecteurs position et vitesse de la particule i sont parallèles au vecteur \mathbf{e}_z) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial t} - c_0^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) &= -\frac{J_z}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

8.1.3 Conservation de la charge

On appelle équation de conservation de la charge, la relation liant la densité de charge au courant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0. \quad (8.14)$$

Notons alors que la loi de Gauss (8.3) est conséquence de l'équation de conservation de la charge et de l'équation d'Ampère (8.1). En effet, en prenant formellement la divergence de l'équation (8.1), on obtient :

$$\frac{\partial \text{div } \mathbf{D}}{\partial t} - \underbrace{\text{div } \text{rot } \mathbf{H}}_{=0} = -\text{div } \mathbf{J},$$

et en utilisant l'équation (8.14),

$$\frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho)}{\partial t} = 0,$$

donc si la loi de Gauss est vérifiée au temps initial, elle l'est en tout temps. C'est donc une équation redondante (cf remarque 8.1.3).

Remarque 8.1.4 • Cette remarque sera très importante numériquement puisqu'elle nous permettra de ne résoudre que les 2 équations (8.1) et (8.2) au lieu des 4 !

8.1.4 Existence de solutions aux équations de Maxwell

Théorème 8.1.5 Si $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0) \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega) \times H(\operatorname{rot}, \Omega)$ et vérifient $\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}_0(\cdot)) = \rho(t = 0, \cdot) = \rho_0$ et $\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$, et si $\mathbf{J} \in \mathcal{C}^1(0, T; (L^2(\Omega))^d)$, $\rho \in \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega))$ et que l'équation de conservation de la charge est vérifiée

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\mathbf{J}} = 0$$

alors le problème (8.11) admet une unique solution forte

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in \mathcal{C}^1(0, T; (L^2(\Omega))^d) \cap \mathcal{C}^0(0, T; H_0(\operatorname{rot}, \Omega)) \times \mathcal{C}^1(0, T; (L^2(\Omega))^d) \cap \mathcal{C}^0(0, T; H(\operatorname{rot}, \Omega))$$

Preuve

La preuve peut se faire à l'aide du théorème de Hille-Yosida [Bre93]. On la trouvera *in extenso* par exemple dans le polycopié [CPS08].

8.2 Du système de Vlasov-Maxwell au système de Vlasov-Poisson

Considérons une particule chargée de charge q et de masse m . Posons $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ la trajectoire et la vitesse de cette particule. Alors, l'expression de la charge et de la densité de courant est respectivement donnée par :

$$\rho(x, t) = q\delta(x - x(t)), \text{ où } \delta(x_0) \text{ est la masse de Dirac en } x_0,$$

$$\mathbf{J}(x, t) = q\mathbf{v}(t)\delta(x - x(t)).$$

Un champ électromagnétique (*i.e* un champ électrique et un champ magnétique) créé par les autres particules environnantes agit sur la particule en la mettant en mouvement suivant la force de Lorentz⁴ suivante :

$$\mathbf{F}(x, t) = q(\mathbf{E}(x, t) + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(x, t)).$$

Soient donc N particules chargées de charge q_i , trajectoire $x_i(t)$, vitesse $\mathbf{v}_i(t)$ alors l'expression de la charge et de la densité de courant est respectivement donnée par :

$$\rho(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(x - x_i(t)),$$

⁴Lorentz, néerlandais 1853-1928

$$\mathbf{J}(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(x - x_i(t)).$$

Mais ne pouvant décrire le mouvement et les interactions de chacune de ces N particules, on considère maintenant le cas d'un ensemble de particules chargées de charge q , trajectoire $x(t)$, vitesse $\vec{\mathbf{v}}(t)$ décrit par une fonction de distribution *i.e.* par une probabilité de présence $f(x, v, t)$ ($f(x, v, t) dx dv$ représente la probabilité de trouver des particules dans un élément de volume $dx dv$ au temps t et au point (x, v) de l'espace des phases). Alors cette fonction f , si l'on néglige les collisions entre particules, est solution de l'équation de Vlasov suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (8.15)$$

avec \mathbf{E} et \mathbf{B} solutions des équations de Maxwell dans le vide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c_0^2 \mathbf{rot} \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{div} \vec{\mathbf{B}} = 0 \end{array} \right.$$

où les densités de courant et de charge sont respectivement données par :

$$\mathbf{J} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v, t) \mathbf{v} dv \text{ et } \rho = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v, t) dv.$$

Ce système non linéaire est appelé système de Vlasov-Maxwell non relativiste. Nous étudierons la résolution de ce problème dans le cadre du projet HOUPIIC dans le chapitre 10.

Quant au cas relativiste, il est donné par l'équation de Vlasov suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla_x f + q (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0$$

où $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ est l'impulsion, qui est reliée à la vitesse par :

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}}{c})^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathbf{p}}{mc}\right)^2}. \quad (8.16)$$

Dans la suite, nous travaillerons dans le chapitre 9 avec ce modèle relativiste pour le maillage mobile.

A partir de ce modèle relativement compliqué, on peut construire une hiérarchie de modèles simplifiés. D'abord, si on suppose que le problème de Maxwell est quasi-stationnaire, c'est-à-dire si l'échelle de variation des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} est très petite devant les temps considérés, le problème se réduit au système Vlasov-Poisson-Ampère (il suffit d'annuler les dérivées en temps dans les équations de Maxwell).

Si de plus, on est en présence de particules dont la vitesse est petite devant celle de la lumière (ions lourds par exemple) alors la densité de courant est petite, donc le champ

magnétique \mathbf{B} est petit et le terme $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ dans la force de Lorentz est négligeable devant le champ électrique \mathbf{E} . En supposant $\partial_t \cdot = 0$ dans (8.2) et (8.3), il reste :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho. \end{cases}$$

Comme le champ électrique est à rotationnel nul, dans un domaine suffisamment régulier (voir pour cela la première partie de ce manuscrit !), il dérive d'un potentiel, voir par exemple [GR86]. Soit donc ϕ , potentiel électrostatique tel que $\mathbf{E} = -\nabla \phi$. Alors ϕ est solution de :

$$-\operatorname{div} (\varepsilon \nabla \phi) = \rho$$

Dans le cas d'un milieu homogène, le problème devient un problème de Poisson :

$$-\Delta \phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

D'où le système de Vlasov-Poisson, dont nous étudierons la résolution par une méthode directe avec maillage mobile dans le chapitre 9 .

8.3 Conservation de la charge

Dans le cadre du système de Vlasov-Maxwell, l'équation de conservation de la charge est contenue dans l'équation de Vlasov. En effet, en utilisant le fait que :

$$\operatorname{div}_x (\vec{\mathbf{v}} f) = f \underbrace{\operatorname{div}_x (\vec{\mathbf{v}})}_{\equiv 0} + \nabla_x f \cdot \vec{\mathbf{v}} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}_v (\vec{\mathbf{F}} f) = f \underbrace{\operatorname{div}_v (\vec{\mathbf{F}})}_{\equiv 0} + \nabla_v f \cdot \vec{\mathbf{F}},$$

on obtient que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_x (\vec{\mathbf{v}} f) + \operatorname{div}_v (\vec{\mathbf{F}} f) = 0,$$

soit en supposant que $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{v}}$ et f sont suffisamment régulières et s'annulent à l'infini et en intégrant l'équation de Vlasov pour tout v :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_x (\vec{\mathbf{v}} f) dV = 0,$$

qui redonne l'équation de conservation de la charge par définition de la densité de charge et de courant.

8.3.1 Propriétés géométriques des équations de Maxwell

Définition 8.3.1 On dit que la suite d'opérateurs A_i , $i = 1, n + 1$

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{A_1} V_2 \xrightarrow{A_2} V_3 \dots \xrightarrow{A_n} V_{n+1} \longrightarrow 0$$

forme une suite exacte si

$$\operatorname{Ker} A_{i+1} = \operatorname{Im} A_i \quad \text{dans } V_i$$

Les espaces intervenant en électromagnétisme forment une suite exacte. En effet,

Proposition 8.3.2 *On a en 2D*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{Id} H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H(\mathbf{rot}, \Omega) \xrightarrow{\mathbf{rot}} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} 0$$

et

$$\mathbb{R} \xrightarrow{Id} H(\mathbf{rot}, \Omega) \xrightarrow{\mathbf{rot}} H(\mathbf{div}, \Omega) \xrightarrow{\mathbf{div}} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} 0$$

et en 3D

$$\mathbb{R} \xrightarrow{Id} H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H(\mathbf{rot}, \Omega) \xrightarrow{\mathbf{rot}} H(\mathbf{div}, \Omega) \xrightarrow{\mathbf{div}} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} 0.$$

Remarque 8.3.3 *On a vu précédemment que les contraintes en divergence sont vérifiées si elles le sont au temps initial et si la conservation de la charge est vérifiée. Cette propriété découle en fait de la propriété de suite exacte des opérateurs intervenant dans les équations de Maxwell. Si cette propriété de suite exacte est vérifiée au niveau discret, on pourra ne résoudre numériquement que les équations d'Ampère et de Faraday. Sinon, il faudra supposer que les équations de Gauss électrique et magnétique ne sont que "presque vérifiées" en introduisant par exemple un multiplicateur de Lagrange de ces contraintes (voir par exemple [ADH⁺93], [Gar02]).*

Chapitre 9

Maillage mobile pour le problème de Vlasov

9.1 Principe de la méthode

9.1.1 Méthode semi-lagrangienne

On cherche ici à résoudre l'équation de Vlasov relativiste

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{v} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \cdot \nabla_p f = 0 \quad (9.1)$$

$$p = m\gamma v \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \text{ ou } \gamma = 1. \quad (9.2)$$

L'inconnue est la fonction de distribution f qui dépend de $(2 \times d) + 1$ variables en dimension d , à savoir les positions (x , d variables), l'impulsion (p , d variables) et le temps. Depuis quelques années avec l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs, il devient envisageable de résoudre cette équation sur un maillage de l'espace des phases pour d égal à 2. La dimension $d = 3$ est un objectif encore difficile à atteindre non seulement en termes de temps de calcul mais aussi en termes de mémoire et de capacité de stockage.

La méthode semi-lagrangienne, introduite par [CK76, SRBG99], consiste à calculer une approximation de la solution de l'équation de Vlasov f sur un maillage de l'espace des phases en utilisant la propriété que la fonction f est conservée le long des caractéristiques. En effet, pour tous temps s et t , on a

$$f(t, x, v) = f(s, X(s; t, x, v), V(s; t, x, v)),$$

où $(X(s; t, x, v), V(s; t, x, v))$ sont les caractéristiques de l'équation de Vlasov et sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = V, \\ \frac{dP}{ds} = \mathcal{F}(s, X(s), P(s)), \\ X(t) = x, \\ V(t) = v, \end{cases} \quad (9.3)$$

où \mathcal{F} est le terme de force dans l'équation (9.1).

La méthode numérique consiste alors à calculer f^{n+1} (i.e. l'approximation de f au temps t^{n+1}) sur les points d'une grille (x_i, v_j) , $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_v$ de l'espace des phases, en connaissant f^n sur ces mêmes points.

Pour commencer, on se donne un maillage uniforme de l'espace des phases (x_i, v_j) , $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_v$. L'approximation de f au temps t^n étant connue, l'objectif est de calculer f^{n+1} aux points de la grille (x_i, v_j) . La méthode comporte deux étapes.

1. Une étape d'advection : la remontée de la caractéristique.
Pour tout (i, j) , calculer le pied de la caractéristique finissant en (x_i, v_j) ie une approximation de $(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}), \mathbf{V}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}))$, en résolvant en arrière le système (9.3).
2. Une étape d'interpolation : Comme

$$f^{n+1}(x_i, v_j) = f^n(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}), \mathbf{V}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1})),$$

f^{n+1} peut être calculée en interpolant f^n qui est connue aux points de la grille $(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}), \mathbf{V}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}))$.

Remarque 9.1.1 *Quelques remarques sur la méthode*

1. L'étape d'advection est résolue avec une méthode d'ordre 2 au moins (typiquement un schéma saute-mouton où on décale en temps les positions et les vitesses ou impulsions dans le cas relativiste).
2. Procédure de time splitting : l'étape d'advection peut dans certains cas être simplifiée. En effet, si on sépare les phases d'advection en espace et en vitesse, les caractéristiques sont alors connues explicitement. Néanmoins cette procédure n'est pas utilisable à chaque fois, et en particulier elle ne l'est pas dans le cas relativiste où le facteur de Lorentz γ couple les variables x et p . Pour plus de détails à ce sujet, on réfère au rapport de recherche [CGS07].
3. Le pied de la caractéristique a une probabilité très faible d'être exactement un point de la grille, d'où la nécessité de l'interpolation. L'interpolation doit être d'ordre suffisamment élevé afin de limiter la diffusion numérique qui est le terme d'erreur le plus important dans cette méthode. Dans la pratique, une interpolation avec des splines cubiques est suffisante.
4. Tous les détails sur la méthode semi-lagrangienne sont dans les références [CK76, FS03, SRBG99].

9.1.2 Maillage mobile

Dans l'algorithme précédent, rien n'oblige en fait à ce que le maillage soit le même à chaque pas de temps d'où l'idée de le changer et de l'adapter à la fonction de distribution [SFF⁺04]. On fait alors en sorte que les points du maillage coïncident autant que faire se peut avec des points où la fonction de distribution est non nulle afin de minimiser le coût de la méthode aussi bien en termes de temps de calcul (ne pas faire d'opérations avec une fonction

de distribution nulle) qu'en terme de mémoire (ne garder que des points utiles). Pour cela, on définit à chaque pas de temps une boîte sur le maillage physique de l'espace des phases et on modifie en conséquence l'algorithme. A chaque pas de temps, on a un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme φ_t de la boîte sur la grille physique de l'espace des phases :

$$\begin{aligned} \text{Boîte (grille logique)} &\xrightarrow{\varphi_t} \text{grille physique} \\ (\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) &\longmapsto (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \varphi_t(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) \end{aligned}$$

La propriété de conservation de f le long des caractéristiques devient alors

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*, t) &= f(\varphi_t(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*), t) \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &= f(\mathbf{X}(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, s)) \\ &= f(\varphi_s(\mathbf{X}^*(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}^*(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)), s) \\ &= f^*(\mathbf{X}^*(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}^*(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), s). \end{aligned}$$

d'où le nouvel algorithme.

Soient f^n et φ_{t_n} étant connues, calculer f^{n+1} :

Etape 1 Calculer les positions dans l'espace des phases des points de la grille logique où l'on va calculer f^{n+1} : $(\mathbf{x}_i^{n+1}, \mathbf{v}_j^{n+1}) = \varphi_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{v}_j^*)$.

Etape 2 Calculer le pied $(\mathbf{X}_i^n, \mathbf{V}_j^n)$ de la caractéristique finissant à $(\mathbf{x}_i^{n+1}, \mathbf{v}_j^{n+1})$.

Etape 3 Ramener $(\mathbf{X}_i^n, \mathbf{V}_j^n)$ sur la grille logique

$$(\mathbf{X}_i^{*n}, \mathbf{V}_j^{*n}) = \varphi_{t_n}^{-1}(\mathbf{X}_i^n, \mathbf{V}_j^n).$$

Etape 4 Interpoler f^{*n} :

$$f^{*n+1}(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{v}_j^*) = f^{*n}(\mathbf{X}_i^{*n}, \mathbf{V}_j^{*n})$$

Seules les étapes 1 et 3 sont nouvelles! De plus, elles sont très faciles à rajouter à tout algorithme semi-lagrangien comme on va le voir dans les sections suivantes, ce qui rend cette méthode facilement implémentable.

N.B La grille logique est choisie uniforme pour simplifier l'interpolation.

Quant au choix de la boîte, il va dépendre du problème considéré. Dans le cas $d = 1$ et pour des faisceaux qui bougent beaucoup dans l'espace des phases, la boîte au temps t^{n+1} est calculée à partir de l'enveloppe RMS du faisceau au temps t^n (pour des détails sur cette enveloppe RMS, voir la section suivante). Cette technique est alors particulièrement adaptée puisqu'elle permet de beaucoup diminuer le nombre de points nécessaire au calcul, le faisceau étant à la fois très localisé et bougeant beaucoup donc nécessitant un maillage très différent à chaque pas de temps. Pour plus de détails sur cette étude, on réfère à [SFF⁺04].

9.2 Application à un problème d'interaction laser-plasma

Dans cette section, on veut appliquer la méthode de maillage mobile à un modèle unidimensionnel Vlasov-Maxwell relativiste qui décrit une interaction laser-plasma. L'équation de Vlasov s'écrit ici :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} + e \left(E_x - \frac{mc^2}{2\gamma} \frac{\partial a^2}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (9.4)$$

où $\gamma = \sqrt{1 + (p^2/m^2c^2) + a^2}$ est le facteur de Lorentz et $a(t, x) = eA(t, x)/mc$ l'amplitude normalisée du potentiel vecteur $\mathbf{A} = (0, A_y, A_z)$, m la masse électronique, c la vitesse de la lumière et e la charge électronique. Cette équation est bien sûr couplée aux équations de Maxwell. Dans ce régime complètement relativiste, la théorie des perturbations ne suffit pas à prendre en compte les non-linéarités qui ont ici un taux de croissance très important d'où l'intérêt d'une approche eulérienne pour ce genre de problème (pour une étude sur le numérique voir [HGB⁺03, GBB⁺96, GBS⁺90]).

Au début de cette simulation d'une interaction laser-plasma, on impose un équilibre global (une Maxwellienne) qui reste stable très longtemps avant qu'une instabilité ne se déclenche et se développe alors très rapidement. Dans une telle situation, l'équilibre ne nécessite pas une description précise mais si la grille n'est pas assez fine, les instabilités ne démarrent pas. De plus, les instabilités se développant de plus en plus, le domaine de calcul doit être très large. Finalement, on est en présence d'un large domaine maillé très finement et donc d'un coût en terme de temps de calcul très important. Le concept de maillage mobile s'avère bien adapté à ce genre de situation : on va construire une grille dynamique de l'espace des phases qui va s'adapter à la forme de la fonction de distribution à chaque pas de temps.

Le domaine en espace reste fixé à $[0, L_x]$, par contre le domaine en impulsion

$$[p_{min}(t), p_{max}(t)], \quad (t \geq 0)$$

est modifié à chaque pas de temps en fonction d'un critère qui porte sur la fonction de distribution. Comme dans [GBB⁺96], le domaine initial en impulsion est choisi symétrique ($p_{min}(t=0) = -p_{max}(t=0)$) avec $p_{max} = 2.5$ et le nombre de points dans cette direction est fixé approximativement à $N_p \approx 700$. Le critère est le suivant : on définit la projection de la fonction de distribution

$$F(t=0, p) = \int_0^{L_x} f(t=0, x, p) dx, \quad p \in [p_{min}(t=0), p_{max}(t=0)],$$

et un seuil ε ,

$$\text{Tant que } F(t=0, p_{max}(t=0)) < \varepsilon,$$

$$p_{max}(t=0) = p_{max}(t=0) - 2\Delta p.$$

De cette façon on préserve la résolution initiale en impulsion (*i.e.* le Δp initial), mais la valeur maximale de l'impulsion est diminuée de sorte que nous gardons seulement les valeurs de $F(t=0, p)$ qui sont significatives.

Par exemple, des expériences numériques nous ont permis de montrer que l'algorithme précédent avec un choix de $\varepsilon = 10^{-10}$ conduit à $p_{max}(t=0) = 0.5$ au lieu de $p_{max}(t=0) = 2.5$, soit **5 fois moins de points** qu'initialement. La fonction de distribution initiale est alors échantillonnée avec la même résolution, puisqu'on a utilisé le même Δp mais sur un domaine beaucoup plus petit. La masse totale reste très similaire à celle calculée sur le grand domaine $[-2.5, 2.5]$. Toutes les quantités macroscopiques sont alors calculées sur le domaine plus petit ; par exemple, la densité est donnée par

$$\rho(t=0, x) = \int_{p_{min}(t=0)}^{p_{max}(t=0)} f(t=0, x, p) dp.$$

Bien sûr d'autres critères que celui-là peuvent être envisagés mais pour cette simulation, il s'est avéré particulièrement efficace.

La simulation commence donc avec un nouveau domaine en impulsion

$$[-p_{min}(t=0), p_{max}(t=0)]$$

qui est adapté à la fonction de distribution au temps $t=0$. La même procédure est ensuite appliquée au début de chaque pas de temps $t^n = n\Delta t$ pour prédire le domaine d'impulsion adapté à la fonction de distribution du prochain pas de temps. Pour cela, on considère la projection sur le domaine d'impulsion au temps t^n

$$F(t=t^n, p) = \int_0^{L_x} f(t=t^n, x, p) dx.$$

Le critère à $t=t^n$ devient alors

$$\text{Si } F(t=t^n, p_{max}(t=t^n)) > \varepsilon,$$

$$\text{alors } p_{max}(t=t^{n+1}) = p_{max}(t=t^n) + 2\Delta p,$$

$$f(t=t^n, x, \pm p_{max}(t=t^{n+1})) = 0, \quad f(t=t^n, x, \pm p_{max}(t=t^{n+1}) \mp \Delta p) = 0,$$

$$\text{sinon } p_{max}(t=t^{n+1}) = p_{max}(t=t^n).$$

Au début de chaque pas de temps, un nouveau domaine est donc prédit qui sera capable de prendre en compte les nouvelles structures de la fonction de distribution qui se développent d'un pas de temps au suivant. Les algorithmes pour résoudre l'équation de Vlasov sont donc résolus sur ce nouveau domaine.

Quand « rien ne se passe », le domaine en impulsion reste inchangé (cas « sinon »), mais quand le test est positif (cas « si »), on rajoute une cellule de chaque côté du domaine pour préserver la symétrie. Avec ce choix, le pas d'impulsion Δp reste le même tout au long de la simulation et la fonction de distribution est toujours échantillonnée sur la même grille sous-jacente donc il n'y a pas d'interpolation supplémentaire. On impose, en plus que les valeurs de la fonction de distribution soient nulles sur les nouvelles cellules $\pm p_{max}(t^{n+1})$, $p_{max}(t^{n+1}) - \Delta p$ et $-p_{max}(t^{n+1}) + \Delta p$. Ces valeurs sont ensuite mises à jour pendant la résolution de l'équation de Vlasov.

Dans cet exemple, la taille du domaine en impulsion reste constante et égale à $[-0.5, 0.5]$, au lieu de $[-2.5, 2.5]$, pendant la majeure partie de la simulation ; puis quand l'instabilité se développe, le domaine augmente pour suivre les nouvelles structures créées jusqu'à atteindre à la fin de la simulation, une valeur très proche de la valeur constante proposée par [G^BB⁺96] (approximativement égale à 2.5). Dans un certain sens, cette observation valide le choix de notre critère. Le résultat le plus significatif est le gain en temps de calcul. En effet, le code original écrit par A. Ghizzo tournait en 15h15mn (pour 10000 pas de temps, $dt = 0,01$), les mêmes résultats sont ici obtenus avec une grille mobile en 2h25mn soit plus de 6 fois plus vite. On trouvera tous les détails dans le rapport [CGS07].

Sur les figures suivantes (où l'on a mis en abscisses la position x et en ordonnée l'impulsion p), on peut voir la différence de taille du domaine sans et avec le maillage mobile (encore appelé la boîte dans les légendes des figures). On voit également que rajouter la boîte ne modifie en rien les paramètres physiques importants de la simulation.

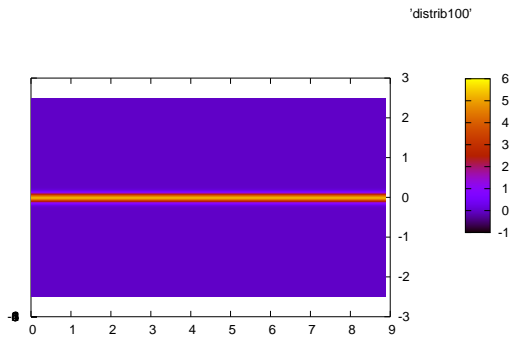


FIG. 9.1 – Initialisation de la simulation - Equilibre Maxwellien ($t = 0s$).

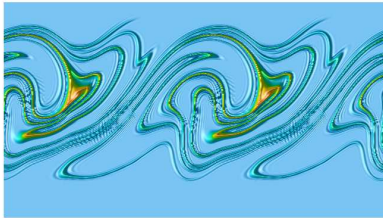


FIG. 9.2 – Instabilité développée.

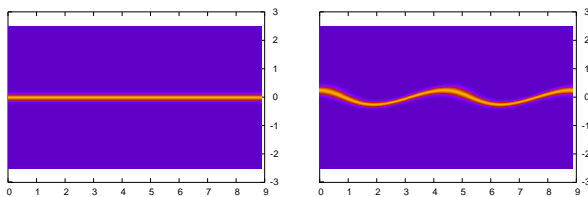


FIG. 9.3 – Fonction de distribution $t = 100s$ et $t = 800s$ sans la boîte.

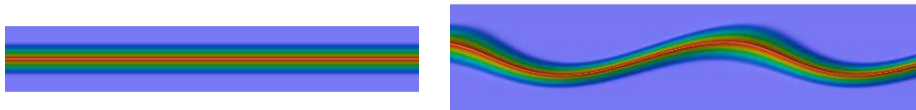


FIG. 9.4 – Fonction de distribution $t = 100s$ et $t = 800s$ avec la boîte.

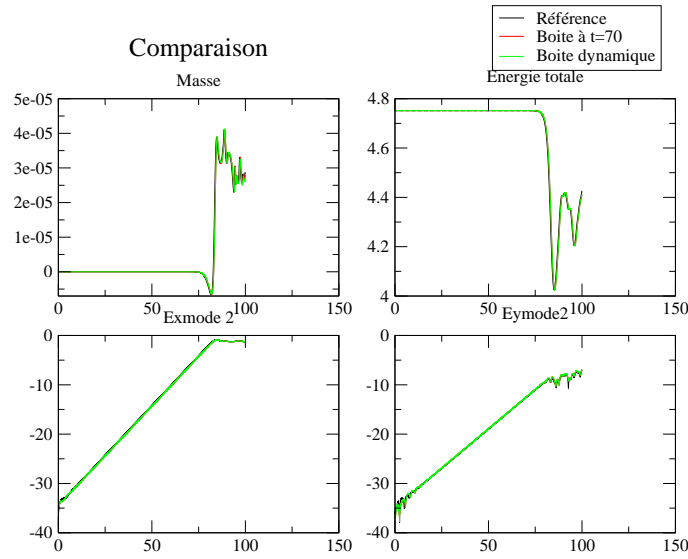


FIG. 9.5 – Comparaison des principaux paramètres physiques avec et sans la boîte.

9.3 Application à LOSS

Au vu de ces très bons résultats 1D, nous avons voulu étendre ces résultats au 2D, en particulier pour la propagation de faisceaux de particules intenses. Le modèle étudié ici est le modèle paraxial 2D, qui peut être obtenu à partir du modèle complet 3D de Vlasov-Maxwell. Là encore, l'objectif est de réduire le coût des méthodes sur maillage qui est excessif car nombre de points sont inutiles, la fonction de distribution des particules étant nulle en ces points. En effet, le faisceau bouge beaucoup et rapidement dans l'espace des phases. Le concept de maillage mobile, qui suit la fonction de distribution à chaque pas de temps semble donc encore une fois être une bonne solution. D'autant que nous avons vu à la section précédente, que cette méthode est facile à implémenter dans toute méthode semi-lagrangienne.

Donc, en suivant les idées développées dans la section précédente, on va calculer à chaque pas de temps un maillage inclus dans le maillage initial. Ce sous-maillage doit être adapté à la forme de la fonction de distribution. Nous allons pour cela considérer que le mouvement global du faisceau est essentiellement dû aux forces externes et donc l'évolution du faisceau peut être approché par l'ellipse solution de l'équation d'enveloppe, voir [FS06]. Cette ellipse est déterminée par des quantités dites RMS du faisceau qui sont des moments de la fonction de distribution. Les paramètres de l'ellipse sont les suivants. L'angle θ par rapport à l'axe (Ox) est donné par

$$\tan \theta = \frac{2\langle xv \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle v^2 \rangle},$$

le grand axe de l'ellipse est lui donné par

$$a = \sqrt{2(\langle x^2 \rangle \cos^2 \theta + \langle v^2 \rangle \sin^2 \theta + 2\langle xv \rangle \cos \theta \sin \theta)},$$

et le petit par

$$b = \sqrt{2(\langle x^2 \rangle \sin^2 \theta + \langle v^2 \rangle \cos^2 \theta - 2\langle xv \rangle \cos \theta \sin \theta)},$$

Les quantités entre crochets sont quant à elles définies par

$$\langle \xi(x, v) \rangle = \frac{\int \xi(x, v) f(x, v) dx dv}{\int f(x, v) dx dv}.$$

Au début de chaque pas de temps t^n , un nouveau maillage G^{n+1} est construit en utilisant les paramètres de l'ellipse correspondante qui contient la fonction de distribution du faisceau. Cette boîte de calcul au temps t^{n+1} est déterminée en utilisant les paramètres a, b et θ à partir des quantités RMS du faisceau au temps t^n . Voici l'algorithme :

1. Calculer le maillage G^{n+1} de l'espace des phases à partir des valeurs RMS de f^n . Etendre f^n à zéro sur $G^{n+1} \setminus G^n$.
2. Trouver le pied de la caractéristique finissant en $(x_i^{n+1}, v_j^{n+1}) \in G^{n+1} : (X^n, V^n) \in G^n$.
3. Calculer $f(t^n, X^n, V^n)$ par interpolation pour obtenir f^{n+1} .

Cet algorithme a été implémenté dans le code LOSS (LOcal Spline Simulator), code 2D (=4D de l'espace des phases) qui résout les équations de Vlasov-Poisson. Plus précisément, le code LOSS est basé sur la méthode semi-lagrangienne en arrière, introduite plus haut avec pour particularité d'utiliser dans l'étape d'interpolation des fonctions splines localisées (d'où son nom) et non des splines globales. On rappelle que l'on est en 4D et que le maillage utilise alors beaucoup de points et donc de temps de calcul et de mémoire. Afin de pouvoir passer des cas tests réalistes, il est nécessaire de paralléliser ce code, cette parallélisation se fait par un **découpage du domaine**, *i.e.* grâce à l'utilisation de plusieurs processeurs qui travaillent chacun sur un morceau du domaine et qui s'échangent les données avec du code source MPI (Message Passing Interface). On découpe donc le domaine en vitesse en sous-domaines et on distribue chacun de ces sous-domaines à un processeur. L'avantage des splines locales et la raison de leur utilisation est que chaque processeur résout l'équation de Vlasov sur son sous-domaine en utilisant des données locales, donc présentes dans ce sous-domaine dont il a la charge. Bien sûr, certaines données, sur les bords du sous-domaine en particulier, doivent être échangées entre les processeurs et on utilise pour cela des communications MPI entre les processeurs. Dans un premier temps, pour tester la faisabilité de la méthode, nous avons modifié ce code en remplaçant la parallélisation qui était faite sur le domaine en vitesse par le maillage mobile sur le domaine en vitesse.

Comme annoncé plus haut, après avoir testé la faisabilité de notre méthode de maillage mobile sur l'algorithme LOSS, nous l'avons implémenté dans un code LOSSx. Le principe est le même, mais le découpage en sous-domaines se fait dans l'espace des positions (x, y) et le maillage mobile est rajouté dans l'espace des vitesses (v_x, v_y) . Ce nouveau code LOSSx nous a permis de passer des cas beaucoup plus gros (en termes de nombre de points) que le code LOSS original. De plus, dans le code LOSSx le pas de temps est beaucoup moins contraint car les déplacements sont beaucoup plus faibles dans l'espace des positions. Dans l'espace des vitesses, les déplacements étant plus importants, le pas de temps était choisi de sorte que les particules ne puissent se mouvoir de plus d'une maille, ce qui aurait augmenté d'autant les communications entre processeurs. Donc au final, LOSSx est aussi plus rapide que LOSS pour ce problème. Ce travail est encore en cours de développement, nous ne présentons qu'un premier cas test, d'autres sont en cours.

Dans les figures présentées ensuite, on peut voir sur la droite la taille du domaine qui évolue en vitesse (donc en ordonnée) sur un cas test faisceau gaussien. D'autres cas tests sont à réaliser

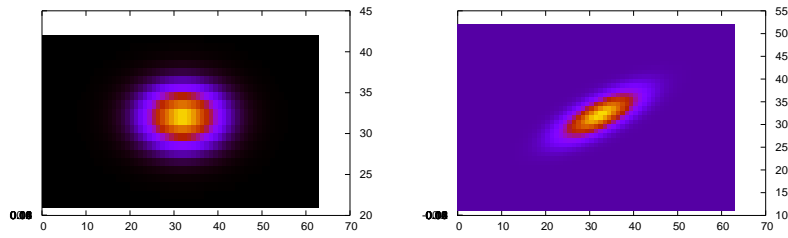


FIG. 9.6 – Faisceau de particules dans le domaine (x, v_x) à l'itération 0 (gauche) et 25 (droite)

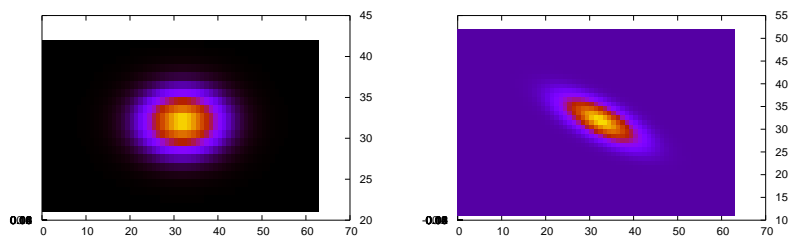


FIG. 9.7 – Faisceau de particules dans le domaine (y, v_y) à l'itération 0 (gauche) et 25 (droite)

Chapitre 10

Résolution du problème de Vlasov-Maxwell

10.1 Solveur PIC

Pour résoudre numériquement le système de Vlasov-Maxwell, l'algorithme de base est le suivant :

1. Résoudre l'équation de Vlasov par notre méthode favorite (soit directe, soit particulière).
2. Calculer la densité de charge et de courant.
3. Résoudre les équations de Maxwell (encore avec notre méthode favorite : différences finies, éléments finis, ...) avec pour second membre la densité de charge et de courant calculées précédemment.
4. En déduire le nouveau champ électromagnétique et retour en 1.

Contrairement au chapitre précédent, dans cette partie, on choisit une méthode particulière pour résoudre l'équation de Vlasov. On redonne les grandes lignes de la méthode et pour plus de détails on renvoie au livre [BL91]. Rappelons le principe de cette méthode : suivre la trajectoire d'un grand nombre de macro-particules représentant le plasma dans l'espace des phases. Pour cela, on se donne une collection N de macro-particules de positions \mathbf{x}_k^0 , de vitesse \mathbf{v}_k^0 et de poids p_k , *i.e.* une somme de mesures de Dirac :

$$f_h^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^N p_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^0)$$

Alors, on peut démontrer [CR84] que l'approximation particulière f_h de f , solution de l'équation de Vlasov avec donnée initiale f_h^0 est donnée pour tout temps $t > 0$ par :

$$f^h(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{k=0}^N p_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k(t))$$

où les positions et vitesses $(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t))$ sont solutions des équations caractéristiques de l'équation de Vlasov

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{v}_k(t) \\ \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_k^0 \\ \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{E}(x_k(t), t) + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}(x_k(t), t)) \\ \mathbf{v}_k(0) = \mathbf{v}_k^0 \end{array} \right. \quad (10.1)$$

N.B. Dans la pratique, $\mathbf{E}(x_k(t), t)$ et $\mathbf{B}(x_k(t), t)$ sont remplacés par $(\mathbf{E}_k(t)$ et $\mathbf{B}_k(t))$ des approximations du champ électromagnétique agissant sur la particule k .

10.1.1 L'algorithme PIC

L'algorithme d'un solveur PIC de Vlasov-Maxwell est alors le suivant.

- Etape d'initialisation : définir f_0^h, E^0, B^0 et un maillage pour le solveur de Maxwell.
- Boucle principale : $(\mathbf{x}_k(t_n), \mathbf{v}_k(t_n)) \stackrel{\text{noté}}{=} (\mathbf{x}_k^n, \mathbf{v}_k^n)$
 1. interpoler, aux positions des particules à partir des points de la grille adjacents, le champ électromagnétique $\longrightarrow (\mathbf{E}_k^n, \mathbf{B}_k^n)$
 2. résoudre les caractéristiques (10.1) (avec un schéma saute-mouton par exemple) :

$$(\mathbf{x}_k^{n-1}, \mathbf{v}_k^{n-1}) \longrightarrow (\mathbf{x}_k^n, \mathbf{v}_k^n)$$

3. calculer l'approximation particulaire de la densité de charge et de courant :

$$\rho^h(\mathbf{x}, t_n) = q \sum_{k=0}^N p_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n), \quad \mathbf{J}^h(\mathbf{x}, t_n) = q \sum_{k=0}^N p_k \mathbf{v}_k^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n)$$

4. « déposer » sur le maillage ces densités
5. résoudre les équations de Maxwell sur le maillage avec pour second membre les densités calculées à l'étape 4 précédente.

Arrêt quand $t_n = T_{\text{final}}$

Revenons un peu sur chacune des étapes. La première étape d'initialisation est importante : les positions et les vitesses des macro-particules au temps initial doivent être distribuées selon une distribution donnée f^0 . S'il est possible de le faire de façon analytique, le mieux est d'inverser la fonction cumulative

$$F(\nu) = \frac{\int_0^\nu f^0 d\mathbf{x}}{\int f^0 d\mathbf{x}}.$$

Dans le cas contraire, on utilise un algorithme d'acceptation-rejet [Dev86]. Dans tous les cas, l'erreur de la méthode est liée au bruit introduit lors de cette étape aléatoire d'initialisation

d'où une vitesse de convergence très lente qui est alors de $1/\sqrt{N}$ où N est le nombre de macro-particules.

Pour ce qui est du mouvement des particules (donc l'étape 2), on utilise un schéma saute-mouton classique afin d'obtenir un schéma d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{x}_k^n - \mathbf{x}_k^{n-1}}{dt} = \mathbf{v}_k^{n-1/2} \\ \frac{\mathbf{v}_k^{n+1/2} - \mathbf{v}_k^{n-1/2}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{E}_k^n + \mathbf{v}_k^n \times \mathbf{B}_k^n) \end{array} \right.$$

La difficulté est ici le décalage voulu pour l'ordre du schéma entre les positions et les vitesses (les positions sont calculées au temps entiers et les vitesses aux demi-temps) mais dans la deuxième équation, nous avons encore besoin d'une vitesse au temps entier \mathbf{v}_k^n . Ce problème est résolu à l'aide de la méthode dite de Boris suivante (là encore pour les détails, voir [BL91]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}^* = \mathbf{v}_k^{n-1/2} + \frac{q}{2m}\mathbf{E}_k^n \\ \frac{\mathbf{v}^{**} - \mathbf{v}^*}{dt} = \frac{q}{2m}(\mathbf{v}^{**} + \mathbf{v}^*) \times \mathbf{B}_k^n \\ \mathbf{v}_k^{n+1/2} = \mathbf{v}^{**} + \frac{q}{2m}\mathbf{E}_k^n \end{array} \right.$$

Pour finir, évoquons le problème des opérateurs d'affectation « particules à maillage » (opérateurs de déposition) et « maillage à particules » (opérateurs d'interpolation). Les densités de charge et de courant particulaires sont données par les mesures suivantes :

$$\rho^h(\mathbf{x}, t_n) = q \sum_{k=0}^N p_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n), \quad \mathbf{J}^h(\mathbf{x}, t_n) = q \sum_{k=0}^N p_k \mathbf{v}_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n).$$

Afin de donner un sens à ces densités sur les noeuds d'un maillage (pour résoudre les équations de Maxwell par la suite), on régularise ces données à l'aide de fonctions régulières que l'on appelle facteurs de forme S (ce sont des splines en général)

$$\rho^h(\mathbf{x}, t_n) = q \sum_{k=0}^N p_k S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n), \quad \mathbf{J}^h(\mathbf{x}, t_n) = q \sum_{k=0}^N p_k \mathbf{v}_k S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n).$$

L'opération « maillage à particules », qui consiste à évaluer les champs électromagnétiques calculés sur le maillage aux positions des macro-particules, doit alors être faite en utilisant les mêmes fonctions de forme, sous peine d'obtenir des forces non physiques. Un exemple d'opérateur (les B-splines) que l'on retrouvera dans la suite est le suivant :

des particules $(x_k^n, y_k^n)_{k=1}^N$ aux points du maillage (x_i, y_j) , $1 \leq i \leq n_x$, $1 \leq j \leq n_y$, on définit

$$(\rho)_{i,j}^n = \sum_{k=1}^N q S^1(x_i - x_k^n, y_j - y_k^n)$$

où

$$S^1(x, y) = S_{\Delta x}^1(x) S_{\Delta y}^1(y) \text{ et } S_h^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(1 - \frac{|x|}{h}) & \text{si } |x| < h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 10.1.1 $S_h^m(x) = (S_h^0 * S_h^{m-1})(x)$ avec

$$S_h^0(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } |x| < h/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'opérateur d'interpolation « maillage à particules » est défini de la même façon.

10.2 Discrétisation éléments finis des équations de Maxwell

Dans cette section, on s'intéresse aux équations de Maxwell posées dans un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^2 suffisamment régulier, de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Mathématiquement, pour avoir une chance que les équations de Maxwell soient bien posées dans un ouvert, il est nécessaire d'ajouter des conditions limites ou conditions de bord. On ne va considérer ici pour simplifier que la condition de conducteur parfait suivante.

• Condition de conducteur parfait

On suppose que le domaine Ω est entouré d'un conducteur parfait, *i.e.* d'un milieu dans lequel le champ électrique est nul. Les conditions de transmission bien connues en électromagnétisme assurent alors que la composante tangentielle du champ électrique est continue de part et d'autre de l'interface, ce qui implique que :

$$\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Cette condition est une **condition réfléchissante**.

On rappelle que dans le cadre du projet HOUPIC (<http://www-math.u-strasbg.fr/houpic>), notre objectif est d'obtenir des solveurs PIC (3D) pour simuler des problèmes réalistes comme la vulnérabilité d'engins spatiaux aux flux de particules ou l'injecteur dans le projet d'accélérateur de notre partenaire suisse PSI (Paul Scherrer Institute). Les différentes géométries à considérer sont alors des géométries complexes qui demandent des maillages non structurés. De plus, nous voulons des méthodes précises et donc monter en ordre. Les méthodes de différences finies, comme la méthode de Yee [Yee66], très robustes et facilement implémentables atteignent leur limite sur des maillages non structurés et lorsque l'on veut monter en ordre. Les méthodes d'éléments finis, continues ou discontinues (méthodes de Galerkin discontinues [HW02, PFC05, CFP05, FLLP05, SBvdV07, JH06].) permettent de répondre à ces deux attentes. Notons qu'il est aussi possible de développer des méthodes de volumes finis d'ordre élevé sur des maillages non structurés [GS97].

10.2.1 Formulation variationnelle

Dans toute la suite, on ne considèrera que le mode TE (Transverse Electrique) qui a été introduit plus haut :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{rot} B = -\mathbf{J}, \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (10.3)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \rho, \quad (10.4)$$

Pour obtenir la formulation variationnelle qui conduit à la méthode d'éléments finis conforme, on multiplie les deux équations par des fonctions tests et on intègre sur tout le domaine. Comme le champ électrique est naturellement dans $H_0(\text{curl}, \Omega)$ (voir le théorème d'existence), on multiplie la première équation (10.2) par une fonction $\psi \in H_0(\text{curl}, \Omega)$ et on choisit de l'intégrer par parties en tenant compte de la condition de bord. On obtient alors : trouver $(\mathbf{E}, B) \in H_0(\text{rot}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tels que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \psi \, dX - \int_{\Omega} B(\text{rot } \psi) \, dX = - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \psi \, dX \quad \forall \psi \in H_0(\text{rot}, \Omega), \quad (10.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} B\varphi \, dX + \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{E})\varphi \, dX = 0 \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (10.6)$$

Remarque 10.2.1 • On aurait très bien pu choisir d'intégrer par partie la deuxième équation (10.3), on aurait alors obtenu le problème suivant : trouver $(\mathbf{E}, B) \in H_0(\text{div}, \Omega) \times H^1(\Omega)$ tels que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \psi \, dX - \int_{\Omega} (\text{rot } B) \cdot \psi \, dX = - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \psi \, dX \quad \forall \psi \in H(\text{div}, \Omega), \quad (10.7)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} B\varphi \, dX + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot (\text{rot } \varphi) \, dX = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (10.8)$$

Noter bien qu'alors les espaces sont très différents pour les deux champs. Cette dernière formulation est très spécifique au 2D, c'est pourquoi nous ne l'avons pas considérée aussi systématiquement que la première. De plus, la conservation de la charge qui est le point dur du couplage Maxwell-PIC est plus délicat à traiter avec celle-ci. On trouvera plus de détails à ce sujet dans l'article à paraître [CPJSS08].

- Noter aussi que l'on peut décider de discrétiser les équations de Maxwell avec des éléments finis nodaux, i.e. des éléments conformes H^1 et non $H(\text{rot})$ mais dans ce cas, il faut prendre en compte, en particulier pour le numérique, certaines singularités (des fonctions harmoniques) qui apparaissent dans les domaines non convexes (voir par exemple [AC01, ACLS03] et les méthodes avec poids [CD02, CJ07]). Ces problèmes de singularités sont les mêmes que ceux que nous avons déjà rencontrés en première partie de ce manuscrit.

10.2.2 Choix des espaces d'éléments finis

Comme le champ électrique vit naturellement dans l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$ et que l'on cherche à construire une méthode d'éléments finis conforme, on a besoin d'utiliser les éléments conformes $H(\text{rot})$, introduits par Nédélec [Néd80], encore appelés éléments d'arête. Comme il existe au moins deux familles d'éléments d'arête ([Néd80], [Néd86]), les deux points suivants vont guider notre choix d'espaces.

Le premier point, développé juste après, est le problème de la condensation de masse. En effet, écrivons le problème d'éléments finis sous forme matricielle. Soient $\{\psi_i\}_{i=1\dots N}$ une base de $W \subset H_0(\text{rot}, \Omega)$ et $\{\varphi_k\}_{k=1\dots M}$ une base de $V \subset L^2(\Omega)$. Le problème (10.5)-(10.6) s'écrit : trouver $(\mathbf{E}, B) \in W \times V$ tels que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \psi_i \, dX - \int_{\Omega} B(\text{rot } \psi_i) \, dX = - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \psi_i \, dX, & \forall i = 1 \dots N, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} B\varphi_k \, dX + \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{E})\varphi_k \, dX = 0, & \forall k = 1 \dots M. \end{cases} \quad (10.9)$$

Quand \mathbf{E} et B sont décomposés sur les bases respectives de W et V , on obtient le système semi-discrétisé suivant (où l'on note $\dot{E} = \frac{d\mathbf{E}}{dt}$ et $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$ par souci de concision) :

$$\begin{cases} M_w \dot{E} - KB = \tilde{J} \\ M_v \dot{B} + {}^t KE = 0 \end{cases} \quad (10.10)$$

avec

$$(M_w)_{1 \leq i, j \leq N} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \boldsymbol{\psi}_i \, dX, \quad (M_v)_{1 \leq i, j \leq M} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dX,$$

$$(K)_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M} = \int_{\Omega} \varphi_j (\text{rot } \boldsymbol{\psi}_i) \, dX.$$

Et on voit bien ici, que la discrétisation en temps va obliger à inverser la matrice de masse à chaque pas de temps, d'où un coût relativement élevé de ce type de méthode. Pour circonvenir ce problème, l'idée est d'utiliser une matrice de masse diagonale ou une approximation diagonale de la matrice de masse, ce que l'on appelle la technique de condensation de masse [Coh01].

Remarque 10.2.2 *On verra dans la suite que la deuxième matrice de masse, à savoir M_v va disparaître grâce au choix des espaces. On aura donc une expression explicite pour le champ magnétique B , et non plus un autre système linéaire à inverser à chaque pas de temps.*

Le deuxième point qui guide notre choix d'espace est le problème de conservation de la charge. On a vu précédemment que l'équation de conservation de la charge est redondante avec l'équation de Gauss à condition que celle-ci soit vérifiée à l'instant initial. On a vu aussi que cette propriété découle de la suite exacte que forment les espaces entrant en jeu dans le système de Maxwell. Si cette propriété de suite exacte est alors vérifiée au niveau discret, il sera inutile de résoudre explicitement l'équation de Gauss, seules celles d'Ampère et Faraday seront nécessaires. En effet, si les espaces sont tels que

$$\begin{array}{ccccc} & \nabla & & \text{rot} & \\ H^1(\Omega) & \longrightarrow & H(\text{rot}, \Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ X & \longrightarrow & W & \longrightarrow & V \end{array} \quad (10.11)$$

alors comme pour $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\nabla \phi \in H_0(\text{rot}, \Omega)$, on peut prendre $\nabla \phi$ comme fonction test dans la formulation variationnelle de l'équation d'Ampère. Alors avec l'équation de continuité et en intégrant par parties, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \nabla \phi \, dX = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

qui n'est autre que la forme faible de la dérivée en temps de la loi de Gauss (10.4). Elle sera donc automatiquement vérifiée en tout temps pourvu qu'elle le soit au temps initial.

Pour atteindre ces deux objectifs, condensation de masse et suite exacte, le choix des espaces est alors le suivant sur des maillages rectangulaires d'abord :

$$X = \{ \xi \in H^1(\Omega) \mid \xi|_{K_i} \in \mathbb{Q}_k(K_i), \forall i = 1, \dots, r \},$$

$$W = \{\boldsymbol{\psi} \in H(\text{rot}, \Omega) \mid \boldsymbol{\psi}|_{K_i} \in \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_{k-1,k}(K_i) \\ \mathbb{Q}_{k,k-1}(K_i) \end{pmatrix}, \forall i = 1, \dots, r\}$$

où

$$\mathbb{Q}_{m,n} = \langle x^i y^j \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \rangle,$$

$$V = \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi|_{K_i} \in \mathbb{Q}_{k-1}(K_i), \forall i = 1, \dots, r\}.$$

L'espace W est connu comme la première famille d'éléments d'arête de Nédélec. Pour rappel, pour être $H(\text{rot})$ -conforme, il faut que les traces tangentielles des fonctions considérées soient continues de part et d'autre des arêtes partagées par deux éléments. On montre alors, voir [Jun07], que la propriété de suite exacte est bien vérifiée au niveau discret puisque

$$\nabla X \subset W, \quad \text{rot}(\nabla X) = \{0\}, \quad \text{rot} W \subset V.$$

Remarque 10.2.3 *C'est grâce à cette dernière propriété que l'on peut éliminer la matrice de masse M_v dans la deuxième équation matricielle comme annoncé. En effet, comme $\text{rot} W \subset V$, les rotationnels des fonctions de base de W peuvent se décomposer sur la base des fonctions de base de V :*

$$\text{rot} \boldsymbol{\psi}_i = \sum_{k=1}^M \sigma_k^V(\text{rot} \boldsymbol{\psi}_i) \varphi_k.$$

Notons R la matrice de cette décomposition, soit $R_{ik} = \sigma_k^V(\text{rot} \boldsymbol{\psi}_i)$, on a alors :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j(\text{rot} \boldsymbol{\psi}_i) dX = \int_{\Omega} \varphi_j \left(\sum_{k=1}^M \sigma_k^V(\text{rot} \boldsymbol{\psi}_i) \varphi_k \right) dX = \sum_{k=1}^M \sigma_k^V(\text{rot} \boldsymbol{\psi}_i) \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_k dX,$$

soit matriciellement $K = RM_v$. Et comme M_v est symétrique, on obtient

$$M_v \dot{B} + {}^t K E = M_v \dot{B} + M_v {}^t R E = 0,$$

ce qui est bien équivalent (car M_v est inversible) à $\dot{B} + {}^t R E = 0$.

Les degrés de liberté de W que l'on va considérer ne sont pas ceux introduits par Nédélec mais les suivants. Commençons par définir $y_i = \frac{i}{k}$, $\forall i = 0, \dots, k$ et Γ_{y_i} le segment horizontal passant par y_i et inclus dans K élément de la triangulation, $\boldsymbol{\tau}_{y_i}$ le vecteur tangent unitaire associé et de manière similaire x_i , Γ_{x_i} et $\boldsymbol{\tau}_{x_i}$ (voir Figure 10.1).

Alors les degrés de liberté sont donnés par :

$$\sigma_{\xi_i}^m(\mathbf{p}) = \int_{\Gamma_{\xi_i}} l_m(\bar{\xi}) \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\xi_i} d\Gamma, \quad \begin{array}{l} \xi = x \text{ ou } y \\ i = 0, \dots, k \\ m = 0, \dots, k-1 \end{array}, \quad \forall \mathbf{p} \in P = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_{k-1,k}(\hat{K}) \\ \mathbb{Q}_{k,k-1}(\hat{K}) \end{pmatrix}$$

où l_m est le $m^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre normalisé sur $[0, 1]$.

Ce choix est guidé en premier lieu par la condensation de masse. En effet, notre choix de fonctions, qui sont des produits de polynômes de Legendre et de Lagrange dans une variable et le fait d'avoir choisi les points de Gauss-Lobatto comme degrés de liberté, amènent naturellement à la condensation de masse. En effet, dans ce cas les fonctions de base sont données par

$$\boldsymbol{\psi}_{\xi_i}^m = \left(L_{\xi_i}(\xi) l_m(\bar{\xi}) \begin{pmatrix} \delta_{\xi y} \\ \delta_{\xi x} \end{pmatrix} \right) \text{ où } \bar{\xi} = x \text{ si } \xi = y \text{ et inversement.}$$

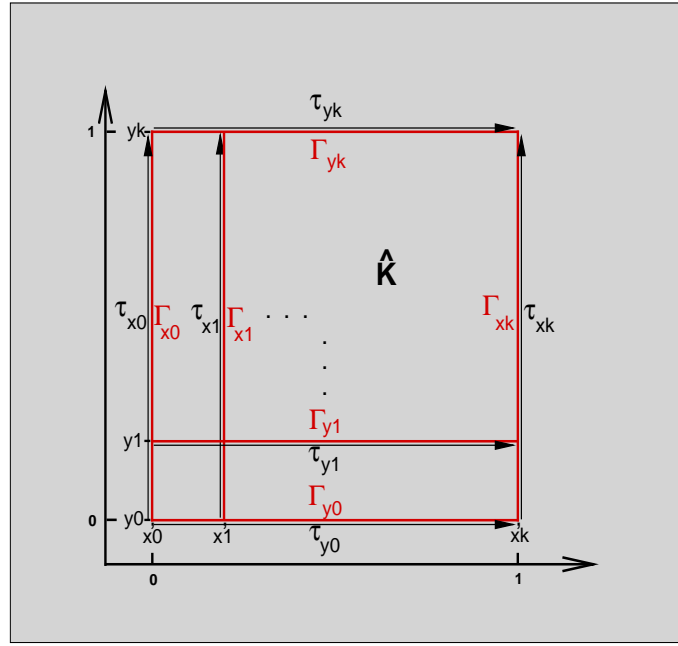


FIG. 10.1 –

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \int_K \psi_{\xi_i}^m \cdot \psi_{\eta_j}^n dX &= \int_K \left(L_{\xi_i}(\xi) l_m(\bar{\xi}) \begin{pmatrix} \delta_{\xi y} \\ \delta_{\xi x} \end{pmatrix} \right) \cdot \left(L_{\eta_j}(\eta) l_n(\bar{\eta}) \begin{pmatrix} \delta_{\eta y} \\ \delta_{\eta x} \end{pmatrix} \right) dX \\
 &= \delta_{\xi\eta} \int_0^1 L_{\xi_i}(\xi) L_{\xi_j}(\xi) d\xi \int_0^1 l_m(\bar{\xi}) l_n(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \\
 &= \delta_{\xi\eta} \delta_{mn} \int_0^1 L_{\xi_i}(\xi) L_{\xi_j}(\xi) d\xi \simeq \omega_i \delta_{ij} \delta_{\xi\eta} \delta_{mn},
 \end{aligned}$$

où les $\{\omega_i\}_{i=0,\dots,k}$ sont les poids associés à la formule de quadrature de Gauss adéquate.

Remarque 10.2.4 • *Le choix des points de Gauss-Lobatto comme degrés de liberté ne permet pas seulement la condensation de masse mais aussi la diminution du conditionnement de la matrice de masse et de la constante de Lebesgue intervenant dans l'erreur de la méthode, pour tous les détails on se réfère à l'article [JSS08].*

- *Il faut se rendre compte que cette condensation de masse ne fonctionne que sur des maillages réguliers. Sur un maillage quelconque, les fonctions de base n'auront plus cette propriété d'être des produits de fonctions de Lagrange et Legendre évaluées chacune en x ou en y . En effet, la transformation qui transporte l'élément de référence $[0, 1]^2$ sur un élément quelconque est alors une transformation bilinéaire qui va coupler les deux directions x et y .*

Sur les maillages triangulaires, on définit les espaces vérifiant la propriété de suite exacte de la façon suivante :

$$X = \{ \xi \in H^1(\Omega) \mid \xi|_{T_i} \in \mathbb{P}_k(T_i) + \bar{\mathbb{P}}_{k-1}(T_i)xy, \forall i = 1, \dots, r \},$$

$$W = \{\boldsymbol{\psi} \in H(\text{rot}, \Omega) \mid \boldsymbol{\psi}|_{T_i} \in \mathbb{P}_{k-1}^2(T_i) + \overline{\mathbb{P}}_{k-1}(T_i) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \forall i = 1, \dots, r\},$$

$$V = \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi|_{T_i} \in \mathbb{P}_{k-1}(T_i), \forall i = 1, \dots, r\},$$

où $\overline{\mathbb{P}}_{k-1}$ est l'espace des polynômes de degré exactement égal à $k - 1$. Encore une fois, pour l'espace conforme $H(\text{rot})$, on a choisi la première famille d'éléments de Nédélec dont on change pour des raisons de conformité sur les maillages hybrides les degrés de liberté comme suit.

Soit $P = \mathbb{P}_{k-1}^2(\hat{T}) + \overline{\mathbb{P}}_{k-1}(\hat{T}) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ l'espace de dimension $k(k+2)$ sur l'élément triangulaire de référence. On définit d'abord les $3k$ premières formes linéaires sur P par

$$\hat{\sigma}_i^m(\mathbf{p}) = \int_{\Gamma_i} l_m \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \, d\Gamma, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 3 \\ m = 0, \dots, k-1 \end{matrix} \quad (10.12)$$

puis les $k(k+2) - 3k = k(k-1)$ suivantes

$$\hat{\sigma}_i^m(\mathbf{p}) = p_i(X_m), \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ m = 1, \dots, \frac{(k-1)k}{2} \end{matrix}, \quad (10.13)$$

où p_i , $i = 1, 2$ sont la première et la deuxième composante du champ de vecteurs $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ et $\{X_m\}_{m=1, \dots, \frac{(k-1)k}{2}}$ un ensemble de points intérieurs au triangle choisi tel que $\{\sigma_i(f) := f(X_i)\}_{i=1, \dots, \frac{(k-1)k}{2}}$ soit \mathbb{P}_{k-2} -unisolvant.

Remarque 10.2.5 *Encore une fois, le choix de la localisation des points de X_i intérieurs au triangle n'est pas fait au hasard. Pour les degrés élevés, un mauvais choix amène des oscillations importantes et donc une mauvaise approximation. En particulier, les points de Lagrange dans le triangle sont un meilleur choix que les moments sur le triangle, qui sont les degrés de liberté proposés originellement. Pour plus de détails on réfère à nouveau à [JSS08].*

Faisons un petit bilan : sur les maillages rectangulaires, le choix des fonctions de base donne naturellement une matrice de masse diagonale. Sur les maillages triangulaires, des schémas de condensation de masse ont été introduits par Cohen et ses co-auteurs [Coh01, PFC05] mais ils doivent pour cela ajouter des degrés de liberté non tangentiels sur les arêtes, ce qui empêche d'avoir la suite exacte pour les espaces considérés. C'est pourquoi, nous avons choisi de travailler sur des maillages hybrides où une grande partie du domaine est maillé en rectangles et les bords en triangles (voir Figure 10.2). La partie rectangulaire, conduisant à une matrice de masse diagonale, reste compétitive en terme de coûts et nous avons limité à une petite partie du domaine, l'inversion de la matrice de masse chère. Le choix des degrés de liberté qui coïncident sur les arêtes partagées par un triangle et un rectangle permet d'affirmer que les espaces choisis sont $H(\text{rot})$ -conformes. De plus, comme la suite d'espaces discrets est exacte sur les rectangles et sur les triangles, elle le reste sur le maillage hybride.

On a pu montrer que jusqu'à l'ordre 5, l'ordre des méthodes est bien celui attendu, c'est-à-dire une convergence en h^{k+1} pour la norme L^2 des champs pour des polynômes de degré k , et que la condensation de masse n'influe pas sur cet ordre de convergence. De plus, nous avons clairement montré la supériorité des méthodes d'ordre élevé qui permettent d'obtenir des erreurs proches du zéro machine avec des maillages relativement grossiers et donc un temps de calcul réduit d'autant. Les tests effectués sur des maillages hybrides montrent bien l'intérêt

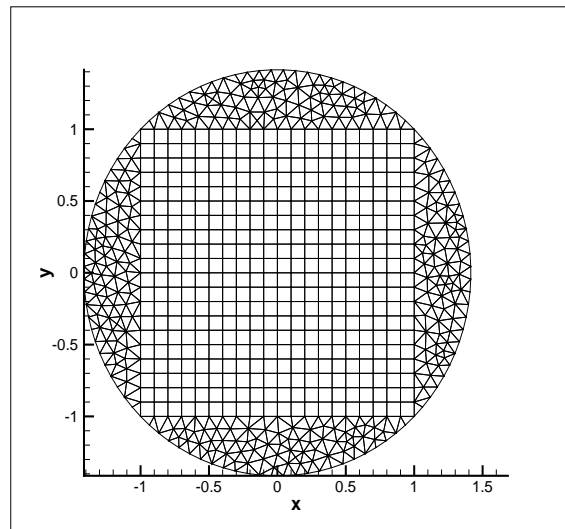


FIG. 10.2 – Exemple de maillage hybride d'un disque.

en terme de temps de calcul d'avoir sur la partie rectangulaire du maillage une matrice de masse diagonale. Tous les résultats numériques sont présentés dans la thèse de S. Jund [Jun07] et résumés dans l'article [JSS08].

10.2.3 Discrétisations en temps

Toujours dans l'objectif d'obtenir des méthodes très précises, nous avons cherché à ce que les schémas en temps soient eux aussi d'ordre élevé afin de ne pas diminuer l'ordre général de la méthode. Pour cela, nous avons testé un certain nombre de méthodes dont les schémas symplectiques [PJC90, Pip06, RWR04, Yos90] et des schémas obtenus par développement de Taylor [HEOC87, DM05b, DM05a]. Ces derniers présentent le défaut d'être instables à certains ordres (1, 2, 5 et 6) pour des problèmes comme le nôtre. Nous avons alors développé une technique de stabilisation pour ces ordres problématiques.

Pour les méthodes symplectiques, il est relativement facile de trouver dans la littérature les coefficients nécessaires à l'implémentation pour les 4 premiers ordres du schéma. Par contre, pour des ordres plus élevés, Yoshida propose de composer les méthodes d'ordre pair $2m$ avec elle-même pour obtenir une méthode d'ordre $2m + 2$, [Yos90].

Toutes ces méthodes sont détaillées et comparées dans la thèse de S. Jund [Jun07]. Les résultats d'efficacité des différentes méthodes sont les suivants : pour les méthodes d'ordre 1, 2 ou 3 les schémas symplectiques sont bien moins chers comparés aux méthodes de développement de Taylor. Par contre, à partir de l'ordre 4, comme les schémas symplectiques sont obtenus par composition entre eux, ils deviennent beaucoup plus chers. Noter que l'avantage des schémas symplectiques est de conserver au niveau numérique l'énergie du problème (d'où leur nom) mais nous avons pu montrer que les schémas type Taylor d'ordre supérieur à 3 présentent des erreurs de dispersion et de dissipation proches du zéro machine, ce qui les rend plus efficaces à partir de cet ordre 3 en terme de temps de calcul que les schémas symplectiques.

10.3 Le problème de conservation de la charge

Reprenons l'algorithme de couplage Vlasov-Maxwell et rappelons qu'à l'étape 3, il faut calculer l'approximation particulière de la densité de charge et de courant afin de résoudre les équations de Maxwell sur le maillage avec pour second membre ces densités calculées à l'étape précédente et redéposées sur le maillage.

On donne ici le schéma complètement discrétisé

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n) \cdot \boldsymbol{\varphi} - c^2 \int_{\Omega} B_h^{n+\frac{1}{2}} \text{rot } \boldsymbol{\varphi} = -\varepsilon_0^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in W_h \subset H(\text{rot}, \Omega) \quad (10.14)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (B_h^{n+\frac{1}{2}} - B_h^{n-\frac{1}{2}}) \psi + \int_{\Omega} \psi \text{rot } \mathbf{E}_h^n = 0 \quad \forall \psi \in V_h \subset L^2(\Omega) \quad (10.15)$$

On rappelle que la densité de charge et de courant sont données par

$$\rho_h^n(\mathbf{x}, t_n) = q \sum_{k=0}^{Nt} p_k S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n), \quad \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{x}, t_n) = q \sum_{k=0}^N p_k \mathbf{v}_k^{n+\frac{1}{2}} S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n),$$

où S est une fonction de forme (que l'on peut prendre égale à la mesure de Dirac δ dans le cas non régularisé).

On a vu plus haut que ne résoudre que les deux équations d'Ampère et de Faraday n'est équivalent à la résolution des équations de Maxwell que si la conservation de la charge est vérifiée. Dans le cas contraire, on pourrait avoir des modes non physiques (qui proviennent de densités de courant et de charge incompatibles) comme solutions numériques et le couplage avec le code PIC pour l'équation de Vlasov pourrait amplifier ces modes.

Dans le couplage solveur PIC et solveur Yee pour Maxwell, pour pallier ce problème, les physiciens ont pris l'habitude de résoudre de temps en temps l'équation de Poisson, après avoir résolu les équations de Faraday et Ampère, afin d'obtenir un champ électrique qui vérifie bien $\text{div } \mathbf{E} = \rho$ et corriger ce champ en conséquence. D'autres introduisent un multiplicateur de Lagrange pour corriger le champ électrique, voir pour cela [ADH⁺93]. D'autres travaux ont été menés qui permettent de définir au mieux la densité de courant de sorte que l'équation de conservation de la charge soit vérifiée, voir pour une revue quasi complète la thèse de R. Barthelmé [Bar05] et l'article [BCS07].

Pour ce qui est d'un solveur éléments finis, on a vu que le choix des espaces discrets permet de ne pas résoudre l'équation de Gauss (qui est directement résolue avec l'équation d'Ampère). Il ne reste plus qu'à définir la densité de courant de façon consistante avec celle de la densité de charge afin de vérifier l'équation de conservation de la charge. Pour ce faire, il faut prendre

$$\rho_h^n(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^N p_k S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n), \quad \bar{\mathbf{J}}_h^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^N p_k \mathbf{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)) dt \quad (10.16)$$

En effet, on a (au moins) formellement pour toute ϕ fonction d'un espace conforme H_0^1 : $\int_{\Omega} (\rho_h^{n+1} - \rho_h^n) \phi = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_h(t) \phi \right] dt$. Puis, pour toute fonction de forme suffisamment

régulière S , avec une formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} S(\cdot - \mathbf{x}_k(t)) \phi &= - \int_{\Omega} [\mathbf{v}_k(t) \cdot \nabla S(\cdot - \mathbf{x}_k(t))] \phi = - \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\mathbf{v}_k(t) S(\cdot - \mathbf{x}_k(t)))] \phi \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{v}_k(t) S(\cdot - \mathbf{x}_k(t)) \cdot \nabla \phi. \end{aligned}$$

En sommant sur les particules, on a

$$\int_{\Omega} (\rho_h^{n+1} - \rho_h^n) \phi = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\sum_{k \leq N} p_k \frac{d}{dt} \int_{\Omega} S(\cdot - \mathbf{x}_k(t)) \phi \right] dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{\Omega} \mathbf{J}_h(t) \cdot \nabla \phi \right] dt. \quad (10.17)$$

Donc, en calculant le courant comme en (10.16), on voit qu'on aura bien la conservation de la charge discrète suivante :

$$\int_{\Omega} (\rho_h^{n+1} - \rho_h^n) \phi - \Delta t \int_{\Omega} \bar{\mathbf{J}}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \phi = 0 \quad \forall \phi \in X_h \subset H_0^1 \quad \text{et } n \in \mathbb{N}. \quad (10.18)$$

Tous les détails sont données dans [CPJSS08].

On se restreint ici au cas sans régularisation ($S = \delta$), et le courant est alors donné par le second membre suivant :

$$\mathcal{J}_i^{n+\frac{1}{2}} := \int_{\Omega} \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \varphi_i^1 = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi_i^1(\mathbf{x}_k(t)) dt, \quad i = 1, \dots, N \quad (10.19)$$

avec $\mathbf{x}_k(t) := \mathbf{x}_k^n + (t - t_n) \mathbf{v}_k^{n+1/2}$ sur $[t_n, t_{n+1}]$ et φ_i fonction de base de $W_h \subset H(\operatorname{rot}, \Omega)$.

Remarque 10.3.1 *On trouvera dans l'article [CPJSS08] ou dans la thèse [Jun07], la démonstration qu'avec les fonctions de plus bas degré, notre solveur éléments finis de Maxwell n'est autre que le solveur de Yee, et que le courant obtenu par la formule 10.16 redonne le courant calculé par Villasenor-Buneman. On montre rapidement ici que les résultats numériques obtenus sont effectivement bien les mêmes avec un solveur Yee ou un solveur éléments finis pour Maxwell et un calcul du courant par la formule de Villasenor-Buneman ou (10.16) sur un cas test d'amortissement Landau :*

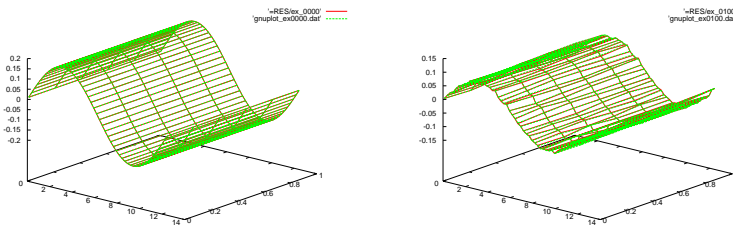


FIG. 10.3 – Champ électrique E_x : $t = 0$ (gauche), $t = 0.97$ (droite)

L'implémentation explicite du calcul du courant par la formule (10.16) a été faite en 2D pour l'ordre 1 et 2 et en 3D pour l'ordre 1, 2 et 3 sur des maillages structurés (concrètement

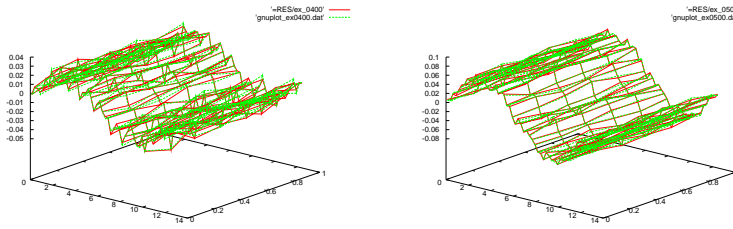


FIG. 10.4 – Champ électrique E_x : $t = 3.91$ (gauche), $t = 4.89$ (droite)

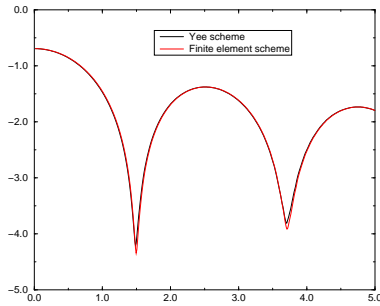


FIG. 10.5 – Amortissement de l'énergie du mode principal du champ électrique.

des rectangles et des parallélépipèdes). Le calcul est fait analytiquement soit par un logiciel de calcul formel (Maple), soit par une formule de quadrature adéquate (*i.e.* qui tient compte du degré de la fonction de base), voir pour tous les détails l'article [CPJSS08]. Les premiers résultats numériques sont satisfaisants mais d'autres cas tests plus poussés sont en cours afin en particulier de mettre en évidence l'intérêt de monter en ordre sur le solveur de Maxwell. Il reste aussi à réfléchir sur la nécessité de la régularisation ou non (prendre S différent de δ).

10.4 Conclusion et perspectives

Toute cette partie est consacré à un travail encore en cours, il reste donc beaucoup de points à explorer dont les plus importants sont les suivants.

Sur les méthodes de résolution directe de l'équation de Vlasov avec maillage mobile, les résultats préliminaires sont très intéressants, il reste néanmoins à mener une étude systématique pour pouvoir affirmer que cette méthode permet de passer des cas réalistes en 4D de l'espace des phases. Nous cherchons aussi à appliquer la méthode originelle développée dans [SFF⁺04], un peu plus sophistiquée et qui permet non seulement à la boîte de grossir et diminuer en suivant le faisceau mais aussi de tourner avec celui-ci et d'avoir une forme elliptique (et donc encore de diminuer le nombre de points nécessaires à sa discrétisation).

Sur le solveur Maxwell, un des axes de recherche actuel est la condensation de masse des éléments d'arête sur des maillages non structurés puisque nous avons pu montrer l'intérêt

d'utiliser cette technique en terme de coût et temps de calcul. L'autre travail consiste à développer un solveur Maxwell éléments finis d'arête 3D sur des maillages hybrides. En effet, pour cela les degrés de liberté partagés par des arêtes d'éléments structurés et non structurés doivent être tels que leurs traces tangentielles sont continues sur l'arête partagée (afin de rester $H(\text{rot})$ -conforme). Nous pensons donc pour l'instant devoir rajouter autour du maillage structuré une couche d'éléments pyramidaux qui devaient permettre ce passage continu de l'un à l'autre.

Pour ce qui est du couplage solveur PIC-solveur Maxwell, une des grandes questions encore en suspens est la nécessité ou non de régulariser le courant. Est-il encore dans ce cas facile de calculer un courant à la fois régularisé et qui vérifierait correctement la conservation de la charge ? Et surtout, est-ce que cela apporte quelque chose à la précision des résultats ou non ?

Troisième partie

Programme de recherche

Pour la simulation numérique d'écoulements de fluide, un des points qu'il reste à faire est l'application de la méthode couplée éléments finis-méthode intégrale pour la formulation (ψ, ω) bidimensionnelle pour le problème non linéaire de Navier-Stokes. Très efficace pour le problème de Stokes, cette méthode devrait permettre d'obtenir de meilleurs résultats en 2D sur des maillages non structurés et ce très rapidement. On rappelle que l'intérêt de cette formulation est qu'elle ne demande en 2D que le calcul de 2 inconnues scalaires, d'où sa rapidité. J'envisage ensuite une collaboration avec Nicolas Passat, informaticien au LSIIT et des neurobiologistes des Hopitaux civils sur la simulation d'écoulement sanguin dans le réseau veineux et artériel cérébral. Nous avons commencé à travailler et pensons à mettre en place un cadre à ce projet prochainement en y intégrant en particulier P. Helluy, le professeur arrivé dernièrement dans l'équipe de l'IRMA dont les thèmes de recherche sont la mécanique des fluides. Le dernier point à regarder est le problème de décomposition de champs de vecteurs avec conditions limites mêlées car c'est de là que viennent la plupart des problèmes rencontrés aussi bien en mécanique des fluides que pour les équations de Maxwell.

Sur la simulation numérique de problèmes de physique des plasmas et faisceaux de particules chargées, la recherche est encore en cours. D'autres travaux sur le maillage mobile et la résolution directe sont prévus, les résultats obtenus à l'heure actuelle ne sont que préliminaires. Nous devons tester la robustesse de l'algorithme en changeant de cas test pour l'interaction laser-plasma par exemple. Pour ce qui est du code LOSSx, nous devons encore le tester sur de nombreux cas pour mesurer l'efficacité de l'algorithme et montrer que l'on peut ainsi passer des cas réalistes qui n'étaient pas envisageables en simulation directe jusqu'ici.

Pour le projet ANR HOUPIIC qui n'est pas terminé, nous développons actuellement le 3D et travaillons à la parallélisation du code, ce qui demande des structures de données bien adaptées, afin de passer les cas tests envisagés, à savoir l'endommagement d'engins spatiaux soumis à des flux de particules chargées.

Conditions de transmission discrètes optimales pour une méthode de décomposition de domaine

Ces travaux réalisés à l'ONERA portent sur une approche complètement algébrique d'une méthode de décomposition de domaine appliquée ici à l'équation de Helmholtz. La méthode à deux multiplicateurs de Lagrange, la méthode FETI (pour Finite Element Tearing and Interconnecting) à un ou deux champs, implique un opérateur augmenté sur l'interface entre les sous-domaines. Cet opérateur (complètement global), qui simule l'absence de frontière, est en général optimisé en discrétisant des approximations de l'opérateur transparent continu.

Au niveau discret, on peut prouver que l'opérateur augmenté optimal n'est autre que le complément de Schur. Comme ce complément de Schur n'est pas calculable facilement en pratique (il demande d'assembler des matrices globales), on s'est alors intéressé à des approximations purement algébriques de ce complément de Schur (factorisation incomplète ou méthodes d'inverse creuse approchée) pour approcher au mieux l'opérateur augmenté sur l'interface. Ce qui présente l'avantage d'être applicable à tous les problèmes et facilement implémentable dans toute méthode de décomposition de domaine.

Les résultats très satisfaisants obtenus avec cette technique pour le problème de Helmholtz sont détaillés dans la publication suivante.

F. Magoulès, F-X. Roux, S. Salmon,

Optimal discrete transmission conditions for a non-overlapping domain decomposition method for the Helmholtz equation,

SIAM Journal on Scientific Computing, Volume 25 (2004), Issue 5, pp 1497–1515.

Simulations d'écoulement sanguin dans des anévrismes

Ces travaux réalisés à l'INRIA Rocquencourt au sein d'une Action de Recherche Coopérative (VITESV pour Visualisation Tridimensionnelle et Exploration du Système Vasculaire) concernent la coordination de différentes équipes de recherche pour obtenir un outil de simulation numérique de l'écoulement sanguin, basé sur la reconstruction de la géométrie tridimensionnelle des vaisseaux sanguins à partir de l'imagerie médicale. Notre objectif à court terme était l'étude de la faisabilité d'une chaîne quasi automatique allant des images médicales aux simulations numériques de l'écoulement sanguin dans les artères maillées du patient considéré. Une importante partie du travail portait sur le passage "images médicales" à "maillage de calcul" éléments finis. Cette partie du travail fait l'objet d'une publication dans le journal *Medical Image Analysis* ([3]). Les résultats d'un écoulement instationnaire (Navier-Stokes incompressible) dans une géométrie tridimensionnelle reconstruite à partir d'images médicales d'anévrismes cérébral et iliaque ont été présentés [1] et publiés dans [2]. Ces premiers résultats ont montré la faisabilité de la chaîne et représentaient les premiers pas de ce qui a donné lieu par la suite à la création d'un projet INRIA (REO) dont l'objectif est, entre autres, de simuler les écoulements de bio-fluides et leur interaction avec les structures les contenant (sang et vaisseaux sanguins d'une part, air et arbre bronchique d'autre part).

[1] S. Salmon *et al.*,

From medical images to computational meshes,

Conference on Modelling and Simulation for Computer-aided Medicine and Surgery MS4CMS'02
ESAIM : Proceedings Volume 12 (2002) pp 1-7.

Numerical simulations of blood flows in arteries for interventional medicines,

Conference on Modelling and Simulation for Computer-aided Medicine and Surgery MS4CMS'02
ESAIM : Proceedings Volume 12 (2002) pp 140-145.

[2] J-F. Gerbeau, S. Salmon, M. Thiriet,

Medical image-based computational model of pulsatile flow in saccular aneurisms,

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (M2AN), Volume 37 Issue 4 (2003), pp. 663-679.

[3] J-D. Boissonnat, R. Chaine, P. Frey, G. Malandain, S. Salmon, E. Saltel et M. Thiriet,

From arteriographies to computational flow in saccular aneurisms : the INRIA experience.

Medical Image Analysis, Volume 9 (2005), Issue 2, pp 133-143.

Tomographie du petit animal

Ce travail de thèse de V. Israël-Jost, mené en collaboration avec le service de Biophysique et Médecine Nucléaire de l'hôpital de Hautepierre a pour objectif l'amélioration de l'imagerie scintigraphique du petit animal. Cette forme d'imagerie est une imagerie fonctionnelle (et non anatomique) qui permet de juger du bon fonctionnement ou de la bonne perfusion d'un organe.

Pour l'homme, la gamma-caméra utilisée en TEMP (Tomographie à Emission Mono-Photonique) qui tourne autour du patient et imprime les images sur le récepteur présente un collimateur parallèle. Mais pour le petit animal (rat, souris), la résolution du dispositif est de l'ordre de grandeur des organes étudiés et il est alors impossible de reconstruire des images raisonnables. Pour obtenir des images correctes, il faut utiliser un collimateur conique afin de grossir l'image sur le récepteur, par simple homothétie. Pour reconstruire les images en 3D à partir des projections 2D, il existe des méthodes analytiques (à partir de la définition de la transformée de Radon) et des méthodes algébriques. Ici, ces dernières ont été préférées car elles permettent de prendre facilement en compte des paramètres physiques et des effets géométriques dus à la particularité du collimateur. Ces méthodes, dites EAR pour Efficient Algebraic Reconstruction, ont donc été adaptées à ce collimateur conique et optimisées afin de réduire le temps de reconstruction et la mémoire utilisée. Les résultats font l'objet d'une publication dans un journal d'imagerie médicale et le logiciel développé est utilisé quotidiennement dans le service de Hautepierre où il l'a été.

V. Israël-Jost, P. Choquet, S. Salmon, C. Blondet, E. Sonnendrücker, A. Constantinesco.
Pinhole SPECT imaging : Compact Projection/Backprojection Operator for Efficient Algebraic Reconstruction.

IEEE Transactions on Medical Imaging, Volume 25 (2006), Issue 2, pp 158 - 167.

Bibliographie

- [AAB⁺07] K. Amoura, M. Azaïez, C. Bernardi, N. Chorfi, and S. Saadi. Spectral element discretization of the vorticity, velocity and pressure formulation of the Navier-Stokes problem. *Calcolo*, 44(3) :165–188, 2007.
- [ABC06] M. Azaïez, C. Bernardi, and N. Chorfi. Spectral discretization of the vorticity, velocity and pressure formulation of the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 104(1) :1–26, 2006.
- [ABC07] K. Amoura, C. Bernardi, and N. Chorfi. Spectral element discretization of the vorticity, velocity and pressure formulation of the Stokes problem. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(5) :897–921, 2007.
- [ABDG98] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9) :823–864, 1998.
- [AC01] F. Assous and P. Ciarlet, Jr. Modèles et méthodes pour les équations de Maxwell. Technical Report 347, ENSTA, 2001.
- [ACLS03] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., S. Labrunie, and J. Segré. Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in axisymmetric singular domains : the singular complement method. *J. Comput. Phys.*, 191(1) :147–176, 2003.
- [Ada75] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [ADH⁺93] F. Assous, P. Degond, E. Heintze, P. A. Raviart, and J. Segre. On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations. *J. Comput. Phys.*, 109(2) :222–237, 1993.
- [AGP92] Y. Achdou, R. Glowinski, and O. Pironneau. Tuning the mesh of a mixed method for the stream function - vorticity formulation of the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 63 :145–163, 1992.
- [Ama97] M. Amara. Personal communication, June 1997.
- [Ara66] A. Arakawa. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion. *J. of Computational Physics*, 1 :119–143, 1966.
- [ASS04] T. Abboud, M. Salaün, and S. Salmon. Coupling harmonic functions-finite elements for solving the stream function-vorticity Stokes problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(5) :765–788, 2004.
- [Aub67] J. Aubin. Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods. *Ann. Scuola Sup. Pisa*, 21 :599–637, 1967.

- [Bab71] I. Babuška. Error bounds for finite element method. *Numer. Math.*, 16 :322–333, 1971.
- [Bar05] R. Barthelmé. *Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 2005.
- [BC06] C. Bernardi and N. Chorfi. Spectral discretization of the vorticity, velocity, and pressure formulation of the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(2) :826–850, 2006.
- [BCS07] Régine Barthelmé, Patrick Ciarlet, and Eric Sonnendrücker. Generalized formulations of Maxwell’s equations for numerical Vlasov-Maxwell simulations. *Math. Models Meth. App. Sci.*, 17 :657–680, 2007.
- [BDG85] A. Bendali, J.M. Dominguez, and S. Gallic. A variational approach for the vector potential formulation of the Stokes and Navier-Stokes problems arising in three dimensional domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 107 :537–560, 1985.
- [BE79] M. Bercovier and M. Engelman. A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows. *J. of Comp. Physics*, 30 :181–201, 1979.
- [BGH⁺88] M. Bernadou, P.L. George, A. Hassim, P. Joly, P. Laug, B. Muller, A. Perronet, E. Saltel, D. Steer, G. Vanderborck, and M. Vidrascu. *MODULEF : Une bibliothèque modulaire d’éléments finis*. INRIA, 1988.
- [BGM92] C. Bernardi, V. Girault, and Y. Maday. Mixed spectral element approximation of the Navier-Stokes equations in stream function and vorticity formulation. *IMA Journal Numer. Anal.*, 12 :565–608, 1992.
- [BL91] C.K. Birdsall and A.B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Institute of Physics Publishing, 1991. Bristol and Philadelphia.
- [Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers. *R.A.I.R.O. R2*, pages 129–151, 1974.
- [Bre93] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1993. Paris.
- [CB68] Y. Choquet-Bruhat. *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*. Dunod, 1968. Paris.
- [CD02] M. Costabel and M. Dauge. Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains. *Numer. Math.*, 93(2) :239–278, 2002.
- [CFP05] N. Canouet, L. Fezoui, and S. Piperno. Discontinuous Galerkin time-domain solution of Maxwell’s equations on locally-refined nonconforming cartesian grids. *COMPEL*, 24(4) :1381–1401, 2005.
- [CGS07] N. Crouseilles, A. Ghizzo, and S. Salmon. Vlasov laser-plasma interaction simulations in the relativistic regime with a moving grid. Technical Report 6109, INRIA Nancy Grand Est, 2007.
- [Cia78] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 4 of *Studies in Mathematics and its applications*. North-Holland, 1978.
- [CJ07] P. Ciarlet, Jr. and E. Jamelot. Continuous Galerkin methods for solving the time-dependent Maxwell equations in 3d geometries. *Journal of Computational Physics*, 226 :1122–1135, 2007.

- [CK76] C.Z. Cheng and G. Knorr. The integration of the Vlasov equation in configuration space. *J. Comput. Phys.*, 22 :330–, 1976.
- [CLS07] N. Crouseilles, G. Latu, and E. Sonnendrücker. Hermite spline interpolation on patches for a parallel solving of the Vlasov-Poisson equation. *Int. J. Math. Comput. Sci.*, 17(3) :335–349, 2007.
- [Coh01] G. Cohen. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave equation*. Springer-Verlag, 2001.
- [CPJSS08] M. Campos-Pinto, S. Jund, S. Salmon, and E. Sonnendrücker. A general formulation for electromagnetic PIC codes. En préparation, Université Louis Pasteur-Strasbourg, 2008.
- [CPS08] M. Campos-Pinto and S. Salmon. Méthodes numériques en électromagnétisme., Cours de M2, Université Louis Pasteur-Strasbourg, 2007-2008.
- [CR74] P. G. Ciarlet and P.A. Raviart. A mixed finite element method for the biharmonic equation. *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, pages 125–145, 1974.
- [CR84] G.-H. Cottet and P.-A. Raviart. Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21 :52–76, 1984.
- [DD86] F. Dubois and J.M. Dupuy. A three dimensional vector potential formulation for solving transonic flow with mixed finite elements. In *6th International Symposium on Finite elements methods in flow problems*, Antibes, France, 1986.
- [Dev86] L. Devroye. *Non uniform random variate generation*. Springer-Verlag, New-York, 1986.
- [DM05a] M. Dumbser and C. D. Munz. ADER discontinuous Galerkin schemes for aeroacoustics. *C. R. Mécanique*, 333(9) :683–687, 2005.
- [DM05b] M. Dumbser and C. D. Munz. Arbitrary high order discontinuous Galerkin schemes. In S. Cordier, T. Goudon, M. Gutnic, IRMA series in mathematics E. Sonnendrücker, and theoretical physics, editors, *Numerical Methods for Hyperbolic and Kinetic Problems*. European Mathematical Society, 2005.
- [DP86] F. El Dabaghi and O. Pironneau. Vecteurs de courant et fluides parfaits en aérodynamique numérique tridimensionnelle. *Numerische Mathematik*, 48 :561–589, 1986.
- [DSS98] F. Dubois, M. Salaün, and S. Salmon. Méthode MAC en triangles et formulation fonction courant-tourbillon pour le problème de Stokes. In *Actes du 30^{ème} congrès d'Analyse Numérique*, page 278, Arles, du 18 au 22 Mai 1998. Canum'98.
- [DSS02] F. Dubois, M. Salaün, and S. Salmon. Discrete harmonics for stream function-vorticity Stokes problem. *Numer. Math*, 92(4) :711–742, 2002.
- [DSS03a] F. Dubois, M. Salaün, and S. Salmon. First vorticity-velocity-pressure numerical scheme for the Stokes problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :4877–4907, 2003.
- [DSS03b] F. Dubois, M. Salaün, and S. Salmon. Vorticity-velocity-pressure and stream function-vorticity formulations for the Stokes problem. *J. Math. Pures Appl.*, 82 :1395–1451, 2003.

- [Dub92] F. Dubois. Une formulation tourbillon-vitesse-pressure pour le problème de Stokes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 314 :277–280, 1992.
- [Dub02] F. Dubois. Vorticity-velocity-pressure formulation for the Stokes problem. *Math. Meth. in the Applied Sciences*, 25 :1091–1119, 2002.
- [EJ97] A. Elmkins and P. Joly. Edge finite elements and mass lumping for Maxwell’s equations : the 3d case. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(11) :1217–1222, 1997.
- [FG97] P. Fernandes and G. Gilardi. Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 7(7) :957–991, 1997.
- [FLLP05] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno. Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3d heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(6) :1149–1176, 2005.
- [FS03] F. Filbet and E. Sonnendrücker. Comparison of eulerian Vlasov solvers. *Comput. Phys. Comm.*, 151 :247–266, 2003.
- [FS06] F. Filbet and E. Sonnendrücker. Modeling and numerical simulations of space charge dominated beams in the paraxial approximation. *M3AS*, 16 :763–784, 2006.
- [FT78] C. Foias and R. Temam. Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation. *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, 5(1) :29–63, 1978.
- [Gar02] E. Garcia. *Résolution des équations de Maxwell instationnaires, avec charges dans des domaines non convexes*. PhD thesis, Université Paris VI, 2002.
- [GBB⁺96] A. Ghizzo, P. Bertrand, M.L. Begue, T.W. Johnston, and M. Shoucri. A Hilbert-Vlasov code for the study of high-frequency plasma beatwave accelerator. *IEEE Trans. on Plasma Sc.*, 24 :370–, 1996.
- [GBS⁺90] A. Ghizzo, P. Bertrand, M. Shoucri, T.W. Johnston, E. Filjakow, and M. R. Feix. A Vlasov code for the numerical simulation of stimulated Raman scattering. *J. Comput. Phys.*, 90 :431–457, 1990.
- [GHD03] O. Génevaux, A. Habibi, and J-M. Dischler. Simulating fluid-solid interaction. In *Graphics Interface*, pages 31–38. CIPS, Canadian Human-Computer Communication Society, A K Peters, June 2003. ISBN 1-56881-207-8, ISSN 0713-5424.
- [GHPS04] M. Gutnic, M. Haefele, I. Paun, and E. Sonnendrücker. Vlasov simulation on an adaptive phase space grid. *Comput. Phys. Comm.*, 164 :214–219, 2004.
- [Gir76] V. Girault. A combined finite element and Marker and Cell method for solving Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 26(183) :39–59, 1976.
- [GL96] V. Girault and H. Lopez. Finite element error estimates for the MAC scheme. *IMA Journal Numer. Anal.*, 16 :347–379, 1996.
- [GP79] R. Glowinski and O. Pironneau. Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem. *SIAM*, 21(2) :167–211, 1979.

- [GR86] V. Girault and P-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [Gri85] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1985.
- [GS97] D. Gaitonde and J. S. Shang. Optimized compact-difference-based finite-volume schemes for linear wave phenomena. *J. Comput. Phys.*, 138(2) :617–643, 1997.
- [HEOC87] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarthy. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, iii. *Journal of Computational Physics*, 71 :231–303, 1987.
- [HGB⁺03] F. Huot, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Sonnendrücker, and O. Coulaud. Instability of the time splitting scheme for the one-dimensional and relativistic Vlasov-Maxwell system. *J. Comput. Phys.*, 185 :512–531, 2003.
- [HHS83] R.P. Harper, C.W. Hirt, and J.M. Sicilian. Flow2d : a computer program for transient,two-dimensional flow analysis. *Flow Science Inc.*, FSI-83-00-01, 1983.
- [HW65] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.
- [HW02] J. S. Hesthaven and T. Warburton. Nodal high-order methods on unstructured grids, i. time-domain solution of Maxwell’s equations. *J. Comput. Phys.*, 181 :186–221, 2002.
- [JH06] G. B. Jacobs and J. S. Hesthaven. High-order nodal discontinuous Galerkin particle-in-cell method on unstructured grids. *J. Comput. Phys.*, 214(1) :96–121, 2006.
- [JS07] S. Jund and S. Salmon. Arbitrary high order finite element schemes and high order mass-lumping. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 17(3) :375–393, 2007.
- [JSS08] S. Jund, S. Salmon, and E. Sonnendrücker. High order conforming finite-element discretisation of the Maxwell equations. En préparation, Université Louis Pasteur-Strasbourg, 2008.
- [Jun07] S. Jund. *Méthodes d’éléments finis order élevé pour la simulation numérique de la propagation d’ondes*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 2007.
- [Ler34] J. Leray. Sur les mouvements d’un liquide visqueux remplissant l’espace. *Acta Math.*, 63 :193–248, 1934.
- [LL71] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*, volume VI of *Physique théorique*. Editions Mir, 1971.
- [Ltd] Computational Dynamics Ltd.
- [LU68] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural’tseva. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, New York, 1968.
- [Mat89] T. P. Mathew. Domain decomposition and iterative refinement methods for mixed finite element discretisations of elliptic problems. *Technical Report*, 463, 1989. Courant Institute of Mathematical Sciences, New-York.
- [Néd80] J.C. Nédélec. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 35 :315–341, 1980.

- [Néd86] J.C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 50(1) :57–81, 1986.
- [Nic91] R.A. Nicolaides. Analysis and convergence of the MAC scheme. 1. The linear problem. ICASE Report 91-28, NASA, 1991.
- [Nit68] J. Nitsche. Ein Kriterium für die quasi-optimalität des RitzchenVerfahrens. *Numerische Mathematik*, 11 :346–348, 1968.
- [PFC05] S. Pernet, X. Ferrieres, and G. Cohen. High spatial order finite element method to solve Maxwell’s equations in time domain. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 53(9) :2889–2899, 2005.
- [Pip06] S. Piperno. Symplectic local time-stepping in non-dissipative dgted methods applied to wave propagation problems. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(5) :815–841, 2006.
- [PJC90] C. Scovel P. J. Channell. Symplectic integration of Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, 3 :231–259, 1990.
- [PS72] S.W. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 :1787–1806, 1972.
- [Rou84] F.X. Roux. Méthode d’éléments finis mixtes et hybrides. Seminar, Paris 6 University, 1984.
- [RT77] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. *Lectures Notes in Mathematics*, 306 :292–315, 1977.
- [Rua91] V. Ruas. Variational approaches to the two-dimensional Stokes system in terms of the vorticity. *Mech. Res. Comm.*, 18(6) :359–366, 1991.
- [Rua95] V. Ruas. Approximating harmonic bases for a decoupled solution of viscous flow problems in $\psi - \omega$ formulation. *Z. Angew. Math. Mech.*, 75(5) :407–408, 1995.
- [RWR04] R. Rieben, D. White, and G. Rodrigue. High order symplectic integration methods for finite element solutions to time dependent Maxwell equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52(8) :2190–2195, 2004.
- [S.A] Fluent France S.A.
- [Sal99] S. Salmon. *Développement numérique de la formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de Stokes*. PhD thesis, Université Paris VI, December 1999.
- [SBvdV07] D. Sármany, M.A. Botchev, and J.J.W. van der Vegt. Dispersion and dissipation error in high-order runge-kutta discontinuous Galerkin discretisations of the Maxwell equations. *J. Sci. Comput.*, 33(1) :47–74, 2007.
- [Sch78] R. Scholz. A mixed method for 4th order problems using linear finite elements. *R.A.I.R.O. Numerical Analysis*, 12(1) :85–90, 1978.
- [SFF⁺04] E. Sonnendrücker, F. Filbet, A. Friedman, E. Oudet, and J.L. Vay. The semi-lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equations. *Comput. Phys. Comm.*, 164 :390–395, 2004.
- [SRBG99] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand, and A. Ghizzo. Vlasov simulation of beams on a moving phase space grid. *J. Comput. Phys.*, 149 :201–220, 1999.

- [SS07a] M. Salaün and S. Salmon. Numerical analysis of the well-posed vorticity-velocity-pressure formulation of the bidimensional Stokes problem. *soumis à SINUM*, 2007.
- [SS07b] M. Salaün and S. Salmon. Numerical stabilization of the Stokes problem in vorticity-velocity-pressure formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(9-12) :1767–1786, 2007.
- [Yee66] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems in isotropic media. *I.E.E.E. Trans. antennas propagation*, 1966.
- [Yos90] H. Yoshida. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 150(5-7) :262–268, 1990.