Un problème inverse en finance: trouver la volatilité du prix d'une action a partir des prix d'options

Raymond Brummelhuis
Université de Reims

4-ième Journée Modélisation et Calcul

Laboratoire de Mathématiques Université de Reims

4 Novembre 2014

Produit dérivée financier

Produit dérivée: Actif financier dont la valeur (le prix) dṕend du (comportement du) prix d'un autre actif financier appelée *actif sous-jacent*

Example classique: option d'achat ou option *call* sur une action: l'option d'acheter une action à une future date T pour un prix K connue aujourd'hui
(call européenne si c'est exactément à T, américaine si l'achat peut s'effectuer à n'importe quel moment avant la date T

Bût: spéculatif ou de protection

Exemple

- Option call sur une action FT avec temps d'exercice $T = 20/03/2015$ et strike $K = 12$
- Prix d'une action FT à 11h59 le $03/11/2014$: $12,535$
- Prix du call au $03/11/2014$: $\simeq 0,27$
- Arrivé à T, on exerce l'option ssi le prix de FT > 12, sinon on la jette et on aura perdue son investissément de 0,27

Exemple, II

- *Actif sous-jacent*: action FT avex prix S_t - variable aléatoire
- *Option call européenne*: l'option (mais pas l'obligation) d'acheter l'action à temps T pour un prix K (connue à l'avance)
- Comment calculer le prix du call à partir d'un modèlle stochastique pour $(S_t)_{t\geq 0}$?
- à T: le pay-off (ou bénéfice instantané) est $\max(S_T - K, 0)$

Valorisation d'options

- *Valorisation rélative*: modèle probabiliste pour $S_t \Rightarrow$ modèle déterministe pour la valeur de l'option sous forme d'un EDP
- On cherche à construire des combinaisons (portefeuilles) de l'option et du sous-jacent qui sont (presque) sans risque (localement en temps)
- Autre ingrédient: la possibilité d'emprunter ou de prêter de l'argent à un taux r fixe, connue à l'avance et donc sans risques
- *Principe d'absence d'arbitrage*: le rendement d'une portefeuille d'actifs qui est sans risque (c'est à dire dont le prix futur est connue à l'avance) est nécessairement égal à r, sinon on pourrait faire un profit sans risque et avec un investissment initial de 0

Modèles stochastiques pour le prix du sous-jacent, I

- Modèle classique (Bachelier - Samuelson):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

W_t mouvement Brownien

- *Interpretation*: (1) rendement sur une période très courte $[t, t + dt]$ est (approximativement) Gausienne:

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \sim N(\mu \delta t, \sigma^2 \delta t)$$

(2) Rendements indépendents sur des périodes différentes

- μ: taux de rendement moyen; σ: volatilité

Equation de Black and Scholes

Si $V(S_t, t)$: prix d'une produit dérivée, alors la fonction $V(S, t)$ satisfait

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV, \quad t < T$$

Condition finale (call européen):

$$V(S, T) = \max(S - K, 0)$$

(problème de Cauchy rétrograde mais on peut remplacer t par $\tau := T - t$)

Observation: pas de μ!

Formule de Black and Scholes

On peut résoudre l'EDP qui se transforme en l'équation de la chaleur

$$C_{\mathrm{BS}}(S, t; K, T; r, \sigma) = SN(d_+) - Ke^{-r\tau} N(d_-),$$

où $\tau := T - t$,

$$d_\pm = d_\pm(S, \tau, K, r, \sigma) = \frac{\log(S/Ke^{-r\tau}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

et

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$$

Confrontation avec la réalité du marché

- Pas trop mal au début, mais après 1987 les choses se gâchent
- L'hypothèse d'une volatilité σ constante ne correspond pas au prix avec lesquelles les options calls se négocient sur le marché
- *Volatilité implicite* (Implied volatility) $\sigma_{\mathrm{impl}}(K, T)$:

$$C_{BS}(S, t; K, T; \sigma_{\mathrm{impl}}(K, T)) = C_{\text{Marché}}(t; K, T)$$

  (NB $\sigma \to C_{BS}$ est strictement croissante)
- $\sigma_{\mathrm{impl}}(K, T)$ n'est pas constante mais dépend de K et de $T - t$ (et aussi de t): volatility smile - en francais: "smile de volatilité"

Modèles stochastiques pour le sous-jacent, II: modèles de volatilité locale

- On prend $\sigma = \sigma(S_t, t)$:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(S, t) S_t dW_t$$

- Rendement $dS_t/S_t \sim N(\mu dt, \sigma(S, t)^2 dt)$ dependra des rendements précédents (à travers de S_t)
- Example: $\sigma(S, t) = \sigma S^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ (modèle CEV ou EVC - Elasiticté de Volatilité Constante): volatilité augmente si le prix est bas

Problème inverse

On a toujours une EDP de type Black et Scholes pour les calls:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(S,t)^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} = rC, \quad t < T$$

avec condition finale $C(S,T) = \max(S-K,0)$ et solution $C(S,t;K,T)$

Question: peut-on reconstruire $\sigma(S,t)$ à partir de

$$\{C(S^*,t^*;K,T) : K \geq 0, T \geq t^*\}?$$

(où on prends pour les derniers las valeurs de marchés des calls observées à l'instant t^*)

L'équation de Dupire

En tant que fonction de K et T, avec (S^*, t^*) fixe, $C(S^*, t^*; K, T)$ satisfait l'équation de Dupire: EDP:

$$\frac{\partial C}{\partial T} - \frac{1}{2}\sigma(K,T)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + rK\frac{\partial C}{\partial K} = 0, \quad T > t^*,$$

et condition au bord

$$C(K, T = t^*) = \max(S^* - K, 0),$$

$\Rightarrow$ Observation d'une seule solution d'un EDP en lieu d'oservation d'une famille de solutions (pour des valeurs initiales différentes)

Réconstruire $\sigma(K, T)$: l'approche naive

$$\sigma(K, T)^2 = \frac{2\left(\frac{\partial C}{\partial T} + rK\frac{\partial C}{\partial K}\right)}{K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}.$$

- En pratique: nombre finie $C^{\mathrm{M}}(S^*, t^*; K_i, T_i)$ de prix d'options call $i = 1, \ldots, N$
- interpoler ces prix par une fonction $\widetilde{C}(K, T)$ qui est C^2 et calculer $\sigma(K, T)$ en utilisant $\widetilde{C}$
- La fonction $\sigma(K, T)$ qu'on trouve ainsi est très sensible à l'interpolation choisie, et peut être très irrégulier

Problème simplifié

Hypothèse simplificatrice:

$$\sigma(K,T) = \sigma(K)$$

(plus générallement $f(T)\sigma(K)$ où $f(T)$ est calibrée séparément)

Problème inverse modifié: trouver $\sigma(K)$ à partir de $K \to c(K,\tau^*)$, τ^* fixe, où $C(K,\tau)$ est solution de

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma(K)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + rK\frac{\partial C}{\partial K} = 0, \quad \tau > 0,$$

$$C(K,0) = \max(S^* - K, 0)$$

Observation à temps fixe; ici: $\tau = T - t^*$

- Problème mal posé
- L'approche classique: régularisation de Tychonov
- $\Rightarrow$ *Estimations de stabilité*:

$$||\sigma_1 - \sigma_2||_1 \leq \mathrm{const} \cdot ||C(\cdot, \tau^*; \sigma_1) - C(\cdot, \tau^*; \sigma_2||_2$$

avec des normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ convenables:

Bouchouev-Isakov 1997, 1999: normes hölderiennes;

Bellasoued - Brummelhuis - Cristofol -Soccorsi 2012-13: normes de Sobolev

Transformation de variables

$K = e^y$; $S^* = 1$, $\tau := T - t^*$, $u(y, T) := C(S^*, t^*; e^y, T)$;
$a(y) := \sigma(e^y)$

$$(*) \begin{cases} \partial_\tau u - \frac{1}{2} a(y)^2 \partial_y^2 u + (r - \frac{1}{2} a(y)^2) \partial_y u = 0, \quad \tau > 0 \\ \\ u(y, 0) = \max(S^* - e^y, 0) \end{cases}$$

On supposera toujours que l'EDP est globalement parabolique:
$a(y) \geq c > 0$ sur $\mathbb{R}^n$ et on note la solution: $u = u(y, \tau; a)$

Problème: on observe $u(y, \tau^*; a)$ pour $y \in \omega \subset \mathbb{R}$ et τ^* fixe, et on veut $a(y)$

Bouchouev & Isakov, *Inv Problems* **13** (1997), **15** (1999); (voir aussi livre de Isakov., 2-ième édition)

Theorem

Si $a_1(y) = a_2(y)$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \omega$ *et si en plus il existe un sous-intervalle ouvert* $\omega_0 \Subset \omega$ *tel qu'on a aussi que* $a_1(y) = a_2(y)$ *pour* $y \in \omega_0$*, alors il existe une constante* C *telle que*

$$||a_1 - a_2||_{\omega,\lambda} \leq ||u(\cdot, \tau^*; a_1) - u(\cdot, \tau^*; a_2)||_{\omega,2+\lambda},$$

$0 < \lambda < 1$ *(norme hölderienne); C dépend de* $||a_j||_{\omega,\lambda}$ *ainsi que de* ω_0 *et de* ω *(et de* τ^**)*

(Preuve: méthode de Bukhgeim - Klibanov, estimations de Schauder, analyticité en τ)

Estimation de stabilité L^2: Bellasoued, B., Cristofoll, Soccorsi (2012-13)

Theorem

Soit $\omega \subset \mathbb{R}$ *borné et* $a_1, a_2 \in C^2(\mathbb{R})$ *bornés avec* $0 < c \leq a_1, a_2$ *et* $a_1(y) = a_2(y)$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \omega$. *Alors il existe pour tout* $\omega_1 \Subset \omega$ *une constante* $C > 0$ *tel que*

$$||a_1 - a_2||_{L^2(\omega_1)} \leq C||u(\cdot, \tau^*; a_1) - u(\cdot, \tau^*; a_2)||_{H^2(\omega)};$$

La constante C *depend de* c, ω, ω_1 *et de* $||a_j||_{C^2(\omega)}$

Technique de la preuve: estimation de Carlemann plus estinations de Sobolev pour les EDP paraboliques

Différences avec B-I:

- estimations sur un plus petit intervalle $\omega_1 \Subset \omega$ sous des hypothèses plus fortes sur a_j *mais*:
- on n'a plus d'hypothèse dégalité de a_1 et a_2 à l'intérieur de ω

Inégalité de Carleman

Estimation de régularité dans espaces de Sobolev à poids

$L = L(y, \partial_y)$ ordre 2, elliptique, $z \in C_c^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$,
$\ell(\tau) = \tau(\tau^* - \tau)$, $T = 2\tau^*$, $\eta = \eta(y) < 0$ sur Ω

$$\begin{aligned} & s^3 \| e^{s\eta/\ell} \ell^{-3/2} z \|^2_{L^2(\Omega \times (0,T))} + s \| e^{s\eta/\ell} \ell^{-1/2} z_y \|^2_{L^2(\Omega \times (0,T))} \\ + \quad & s^{-1} \| e^{s\eta/\ell} \ell^{1/2} z_\tau \|^2_{L^2(\Omega \times (0,T))} \\ \leq \quad & C(\| e^{s\eta/\ell} (\partial_\tau - L_a) z \|^2_{L^2(\Omega \times (0,T))}. \end{aligned}$$

$s \geq 1$, C indépendant de s

Idée de la démonstration

$K = e^y$, $a_j(y) = \frac{1}{2}K^2\sigma_j(K)$, $r = 0$ (spedg),

$$L_a = a(y)(\partial_y^2 - \partial_y)$$

$\partial_\tau w_j = L_{a_j} w_j$, donc $w := w_1 - w_2$ satisfait

$$\partial_\tau w - L_{a_1} w = (a_1(y) - a_2(y)\theta, \quad \theta(y,\tau) = \partial_y^2 w_2 - \partial_y w_2$$

Problème: estimer membre de droite (qui contient $a_1 - a_2$) en termes de $w(\cdot, \tau^*)$

$z = \varphi w$, $f = (a_1 - a_2)\theta$

$$\begin{aligned} & c\int_\Omega s|f(y)|^2 e^{2s\eta(y,\tau^*)}dy \\ \leq \; & \int_{\Omega'} s|z(y,\tau^*)|^2 e^{2s\eta(y,\tau^*)}dy + \int_{\Omega'} s|\varphi\mathcal{L}_1(w)(y,\tau^*)|^2 e^{2s\eta(y,\tau^*)}dy \\ \leq \; & \int_{\Omega'} s|z(y,\tau^*)|^2 e^{2s\eta(y,\tau^*)}dy + C||w(\cdot,\tau^*)||^2_{H^2(\Omega')}, \end{aligned}$$

Deuxième terme OK, pour le premier terme on écrit

$$z(y,\tau^*) = \int_0^{\tau^*} \varphi\partial_\tau z d\tau$$

et on utilise que $z_\tau := \partial_\tau z$ satisfait de nouveau un EDP du même type

$$\partial_\tau z - L_{a_1} z_\tau = (a_1 - a_2)\widetilde{\theta} + Q_1(z) \text{ (N.B. } a_j \text{ nde dépend pas de } \tau)$$

On applique alors Carleman à z_τ

Modèles stochastiques pour le prix du sous-jacent, III: modèles à volatilité stochastique

- On admet une deuxième source d'incertitude autre que le Brownien W_t qui influence directement la volatilité:
- $$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ d\sigma_t &= a(\sigma_t)dt + b(\sigma_t)dZ_t, \end{aligned}$$

  avec Z_t un MB correélée avec W_t:

  $$dW_t \; dZ_t = \rho dt$$

  (corrélation constante de ρ)

- Exemple: modèle de Heston:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ d\sigma_t &= \kappa(\theta - \sigma_t)dt + \eta\sqrt{\sigma} dZ_t, \end{aligned}$$

- Généralisation: modèle LV-SV:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t g(S_t, t) S_t dW_t \\ d\sigma_t &= a(\sigma_t, t)dt + b(\sigma_t, t) dZ_t, \end{aligned}$$

- E.g. combinaison Heston + CEV: $g(S) = S^{-\alpha}$.

EDP pour un modèle de volatilité stochastique

Si $V(S_t, \sigma_t, t)$ est le prix d'une option, alors la fonction $V(S, \sigma, t)$ doit maintenant satisfaire l'EDP

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} \quad &+ \quad \frac{1}{2}\left(\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho\sigma b(\sigma) S \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial S} + \frac{1}{2} b(\sigma)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\right) \\ &+ \quad \alpha(\sigma)\frac{\partial V}{\partial\sigma} + rS\frac{\partial V}{\partial r} = rV\end{aligned}$$

(plus condition finale $\max(S-K,0)$ à $t=T$ s'il s'agit d'un call)

Ici, $\alpha(\sigma) = a(\sigma) - \lambda(\sigma)b(\sigma)$ pou une certaine fonction $\lambda(\sigma)$ appelé le *prix de risque de volatilité*

Problème inverse pour des modèles VS

Question: à partir des prix des tous les call européens observée à un instant t^*, pour une valeur donnée pour le prix du sous-jacent S^* et pour la volatilité instantanée $\sigma_{t^*} = \sigma^*$ à t^*, que peut-on dire de $\alpha(\sigma)$ (N.B. $\alpha(\sigma)$ et pas $a(\sigma)$!) et de $b(\sigma)$?

- Est-il possible de reconstruire au moins un des deux ou certaines combinaisons ou fonctions de deux?
- Plus générallement (en cas de réponse négative), quelle genre d'information sure les coefficients $\alpha(\sigma)$, $b(\sigma)$ peut-on exactement tirer des prix des options call?

Strategy pour Dupire

1. Prix des call $\Rightarrow$ densité de probabilité risque-neutre

$$e^{r(T-t^*)}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = p(K,T|S^*,t^*)$$

2. $p:(K,T) \to p(K,T|S^*,t^*)$ densité de transition: satisfait l'équation de Kolmogorov avancée (ou léq. de Fokker-Planck):

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial K^2}\left(\sigma(K,T)^2 p\right) - r\frac{\partial}{\partial K}(rKp)$$

associée au processus $dS_t = rS_t dt + \sigma(S_t)S_t dW_t$.

$$(p(K,T) = \mathbb{P}(S_t = K|S_{t^*} = S^*) \text{ où } dS_t = rS_t dt + \sigma(S_t)S_t dW_t)$$

On essaie la même strategy en supposant $\rho = 0$ et aussi $r = 0$

- D'une part:

$$\partial_K^2 C(S, 0|K, T) = p(K, T|S^*, 0)$$

- D'autre part on montre (en conditionnant d'abord sur $(\sigma_u)_{0 \leq u \leq T}$) que

$$p(K, T|S, 0) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{-((\log(K/S)+\frac{1}{2}\mathcal{V}_t)^2/2\mathcal{V}_T}}{K\sqrt{2\pi\mathcal{V}_T}}\right)$$

avec $\mathcal{V}_T = \int_0^T \sigma_u^2 du$ la *variance réalisée* (à l'instant T) *sur* $[0, T]$

Si on prend $t^* = 0$, $S^* = 1$ et $K = e^x$ et si on pose

$$f(x) := e^{3x/2}\partial_K^2 C(1,0;K,T)|_{K=e^x},$$

alors

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2v}-\frac{v}{8}}\, q(v,T)\,\frac{dv}{\sqrt{2\pi v}},$$

avec

$$q(v,T)dv = \mathbb{P}(\mathcal{V}_T \in [v, v+dv])$$

d'où la transformée de Fourier

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{8})v}\, q(v,T)\,dv \\ &= \mathbb{E}\left(e^{-s\mathcal{V}_T}|\sigma_0=\sigma^*\right), \quad s = \frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{8} \geq \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Donc:

$\{C(S,0;K,T) : K > 0, T > 0\} \Rightarrow$ fonction génératrice de $\mathcal{V}_T$:

$$\mathbb{E}\left(e^{-s\mathcal{V}_T}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-s\mathcal{V}_T}|\sigma_0 = \sigma^*\right), \quad s \geq 0$$

$\Rightarrow q(V,T)$ par inversion de la transformée de Laplace

Question: $q(v,T) = q(v,T|\sigma^*,0) \Rightarrow \alpha(\sigma),\ b(\sigma)$?

Par le *théorème de Feynman - Kac*:

$$g(\sigma, T; s) := \mathbb{E}\left(e^{-s\int_0^T \sigma_u^2 du} | \sigma_0 = \sigma \right)$$

est solution de

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{1}{2} b(\sigma)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} + \alpha(\sigma) \frac{\partial g}{\partial \sigma} - s\sigma^2 g, \quad T > 0,$$
$$g(\sigma, 0; s) = 1$$

Question: que peut-on dire du problème inverse suivant:

$$\{g(\sigma^*, T; s) : s \geq 0, T > 0\} \;\Rightarrow\; \alpha(\sigma), b(\sigma)?$$

Cas spécial

$b(\sigma) =$ constant $= 1$; alors, en changeant s en y, T en t et en posant

$$V_\alpha(y) = \frac{1}{2}\left(\alpha(y)^2 + \alpha'(y)\right),$$

$$w(y,t;) := e^{A(y)} g(y,t;\sigma), \quad A'(y) = \alpha(y),$$

on trouve une famille de semi-groupes de Schrödinger paramétrisée par s:

$$\partial_t w = -Hw, \quad H = -\frac{1}{2}\partial_y^2 + V_\alpha(y) + s^2 y^2,$$

avec condition initiale (inconnue aussi!) $w(y,0) = e^{A(y)}$.

Question: si on observe $w(y^*,t;s)$ pour un y^* donné et ceci quelque soient $s,t>0$, peut-on réconstruire $\alpha(y)$?

A. El Badia, 1987 - pb parabolique sur un intervalle avec potentiel symétrique et valeur initiale connue - reduction à un problème inverse spectral