Laboratoire d'Analyse Numérique
UFR 921

IAT / Conservatoire National des Arts et Métiers

Développement numérique de la formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de Stokes

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 Décembre 1999

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Paris 6

par

Stéphanie SALMON

Composition du jury

Président :	Mme Christine Bernardi	Paris VI
Rapporteurs :	M. Emmanuel Grenier	Ecole Normale Supérieure de Lyon
	M. Jean-François Maître	Ecole Centrale de Lyon
Examinateurs :	Mme Vivette Girault	Paris VI
	M. Olivier Pironneau	Paris VI
Directeurs de thèse :	M. François Dubois et M. Michel Salaün	Institut AéroTechnique / CNAM

Mis en page avec la classe TheseCRIN.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier vivement François Dubois de la confiance qu'il m'a témoignée en me confiant ce sujet de thèse. L'intérêt qu'il a su montrer pour mon travail et ses conseils ont été pour moi de la plus grande importance. J'ai beaucoup appris pendant ces trois ans sous sa direction.

Je remercie Michel Salaün pour sa patience au quotidien et sa grande disponibilité, pour les après-midis entiers passés à traquer les « bugs » et pour nos interminables discussions littéraires. Ce fut un plaisir de travailler avec lui.

Mme Christine Bernardi m'a fait l'honneur de présider le jury, qu'elle en soit ici remerciée.

Je remercie M. Emmanuel Grenier et M. Jean-François Maître qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ce dont ils se sont acquittés avec sérieux et diligence. Leurs judicieuses remarques m'ont permis de clarifier certains aspects de ma rédaction.

Je remercie également Mme Vivette Girault et M. Olivier Pironneau qui ont accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je profite de cette occasion pour remercier Denise Vial et à nouveau Michel Salaün de m'avoir impliquée dans leurs enseignements au Conservatoire National des Arts et Métiers et de m'avoir fait profiter de leur expérience et de leurs qualités pédagogiques, je leur dois beaucoup.

Enfin, ces trois ans n'auraient pas été aussi passionants s'il n'y avait pas eu ce cadre de travail exceptionnel qu'est l'Institut Aérotechnique. Merci à tous et surtout à Marie-Thérèse Bourdeix, à Laurent Dala, à Philippe Destuynder, à Pascal Hémon, à Françoise Santi et à Olivier Wilk pour le temps passé à me faire profiter de leurs expériences respectives et de leurs conseils et pour leur amitié. Remerciements particuliers à M. Claude Blanche, notre ingénieur système pour ses compétences ainsi qu'à Nicolas Brice et Michel Doucet pour leur bonne humeur et nos passionnantes discussions à la cantine. Je souhaite bonne chance à Emmanuelle Goût-d'Hénin, à Hassiba Hadj-Amar et à Flore Molenda pour leur thèse et les remercie de leur soutien constant. Finalement, pour n'oublier personne, merci à tous les stagiaires et mémoires d'ingénieurs qui ont passé du temps à l'Institut et contribué à l'ambiance si sympathique qu'il y règne.

Résumé de la thèse

L'objectif de cette thèse est de développer une nouvelle méthode numérique pour résoudre les équations de Stokes bidimensionnelles sur des maillages formés de triangles quelconques en s'inspirant de la méthode Marker And Cell qui nécessite des maillages en quadrangles quasi-réguliers. L'idée proposée pour cela est de résoudre le problème de Stokes avec pour variables le tourbillon, la vitesse et la pression.

Alors que les résultats numériques obtenus sur des maillages réguliers sont satisfaisants, ceux sur des maillages non structurés ne le sont pas. Il s'est avéré lors de l'étude théorique que ce problème est un problème de stabilité.

Une comparaison est ensuite menée avec la formulation fonction courant-tourbillon. On montre théoriquement et numériquement que la formulation tourbillon-vitesse-pression est une généralisation de la formulation fonction courant-tourbillon permettant la prise en compte de conditions limites plus générales.

On commence alors par proposer une stabilisation numérique des deux formulations par ajout de fonctions bulles en vitesse qui améliorent considérablement les résultats numériques.

Ensuite, on montre que l'instabilité, due à des fonctions harmoniques discrètes, peut être levée en utilisant de véritables fonctions harmoniques. Ce point donne lieu à une méthode numérique préliminaire utilisant un raffinement homothétique des maillages. On résout ainsi l'instabilité de la formulation fonction courant-tourbillon et on améliore les précédents résultats de convergence connus de cette formulation. En particulier, on démontre que le tourbillon converge en moyenne quadratique avec une erreur d'ordre au moins un par rapport au pas du maillage.

En dernier lieu, on applique la méthode à la formulation tourbillon-vitesse-pression et on obtient de cette façon un nouveau mode de calcul de la pression qui s'avère convergent d'un point de vue expérimental.

Abstract

This thesis deals with the implementation of a new numerical method for solving bidimensional Stokes equations on non structured triangular meshes. The aim is to extend the Marker and Cell method developped on quadrangular meshes to triangular ones. The mathematical tool is a variational formulation which involves three variables : vorticity, velocity and pressure.
First numerical results obtained on regular meshes are as good as expected but those on unstructured meshes are not acceptable. This problem is due to the instability of the scheme.
We then compare this new formulation with the classical one in stream function-vorticity that presents the same problem of instability. We show, theoretically and numerically that the vorticity-velocity-pressure formulation is a generalization of the stream function-vorticity formulation that allows more general boundary conditions.
We first propose a numerical stabilization of both formulations by help of bubble functions in velocity that improves numerical results on unstructured meshes.
Then, we prove that the instability, due to discrete harmonic functions, can be corrected by using rigourously harmonic functions. It leads to a preliminary numerical method using homothetic refinement of meshes. Thus, the stream function-vorticity formulation is stable and previous known results of convergence are improved. Indeed, we prove that the vorticity converges in at least one in quadratic norm.
Finally, we extend this method to the vorticity-velocity-pressure formulation and we obtain by this way a new algorithm to compute the pressure which is numerically convergent.

Table des matières

Introduction

1 Motivation physique et mathématique

Le problème de Stokes n'est autre que le problème de Navier-Stokes linéarisé autour d'une vitesse nulle. Il traduit l'écoulement d'un fluide incompressible à nombre de Reynolds petit, c'est-à-dire un écoulement à basse vitesse ou l'écoulement d'un fluide très visqueux, deux cas qui permettent de négliger les termes non linéaires de convection (voir [LL71]).
L'équation qui traduit le mouvement du fluide dans un domaine Ω est la suivante :

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans} \quad \Omega$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide, p sa pression, $\nu > 0$ la viscosité cinématique et $\mathbf{f}$ le champ de forces appliqué au fluide. La condition d'incompressibilité quant à elle s'écrit :

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Mathématiquement, ce problème est important car savoir le résoudre est souvent nécessaire pour résoudre le problème non linéaire de Navier-Stokes. En particulier, dans certains algorithmes de résolution de l'équation de Navier-Stokes, chaque pas de temps nécessite la résolution d'un problème de Stokes ([GR86]).

La méthode Marker And Cell (que l'on note MAC) est une méthode numérique qui a été développée dans les années 60 à Los Alamos [HW65] pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur des maillages quadrangulaires quasi réguliers, cette méthode est aussi connue sous le nom de grille C d'Arakawa en météorologie [Ara66]. Dans cette méthode utilisée dans la plupart des codes industriels (Flow3d de Harper, Hirt et Sicilian [HHS83], Phoenics de Patankar et Spalding [PS72], Fluent [FFS], StarCD [CDL] *etc*), la composante horizontale de la vitesse est discrétisée à l'aide de ses flux au travers des côtés verticaux de la maille, la composante verticale par ses flux au travers des côtés horizontaux de la maille et la pression est constante par maille (cf fig.1). Le tourbillon est alors naturellement défini aux sommets de la grille à partir des flux de vitesse normale tournant autour de chaque sommet (figure 2). Pour l'analyse de cette méthode voir [Nic91], [Gir76], [GL96].

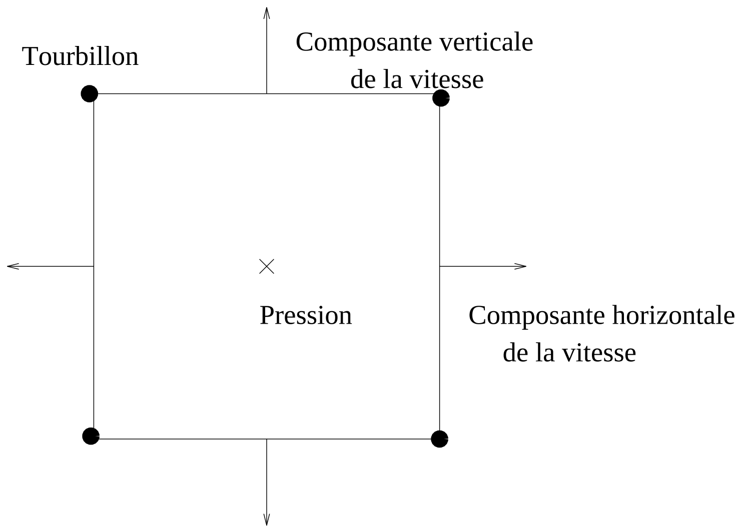


Fig. 1 – *Degrés de liberté de la méthode MAC.*

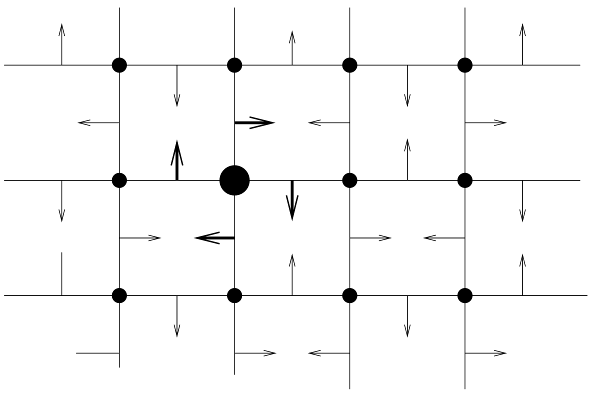


Fig. 2 – *Discrétisation du tourbillon.*

L'objectif de cette thèse est de trouver une méthode numérique s'inspirant de la méthode MAC pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur des maillages formés de triangles quelconques.
L'idée proposée pour cela par François Dubois est de formuler de façon variationnelle le problème de Stokes avec pour variables le tourbillon, la vitesse et la pression [Dub91], [Dub92], [Dub95]. Dans le cas de deux dimensions d'espace, le tourbillon est discrétisé aux sommets du maillage (polynômes $\mathbb{P}^1$), la vitesse par ses flux au travers des arêtes des triangles (éléments finis de Raviart-Thomas de degré 1) et la pression est cherchée constante par triangle (cf fig.3).

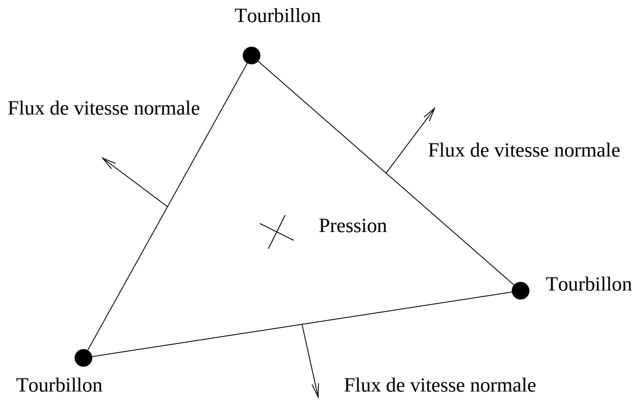


Fig. 3 – *Degrés de liberté pour la formulation* $(\omega, \mathbf{u}, p)$

Il existe entre autres deux formulations classiques du problème de Stokes : l'une dont les variables sont la vitesse et la pression du fluide (tel qu'il est posé au-dessus), l'autre dont les variables sont la fonction courant et le tourbillon. Chacune des formulations présente des avantages et des inconvénients. L'avantage majeur de la formulation en $(\mathbf{u}, p)$ est sa facilité d'implémentation pour des géométries quelconques. Elle demande néanmoins de prendre en compte de façon rigoureuse la condition inf-sup qui pour être vérifiée nécessite que les espaces de discrétisation pour $\mathbf{u}$ et p soient correctement choisis ([GR86] et références incluses). Par contre l'inconvénient est que la vitesse dans ce cas n'est pas à divergence exactement nulle.
La formulation (ψ, ω) est justement une réponse à cet inconvénient. La vitesse est ici cherchée sous la forme du rotationnel de la fonction courant $\mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \psi$, donc forcément à divergence nulle après discrétisation. La difficulté est ici la prise en compte des conditions limites sur la vitesse qu'il faut transposer sur la fonction courant. De plus la fonction courant n'est pas toujours définie même en deux dimensions, par exemple dans les problèmes de puits et source. En effet, si la frontière a plusieurs composantes connexes sur lesquelles le flux de vitesse normale n'est pas à moyenne nulle sur chacune des composantes, la vitesse (pourtant à divergence nulle) ne peut être représentée sous la forme d'un rotationnel (voir [FT78] et un exemple en figure 4).

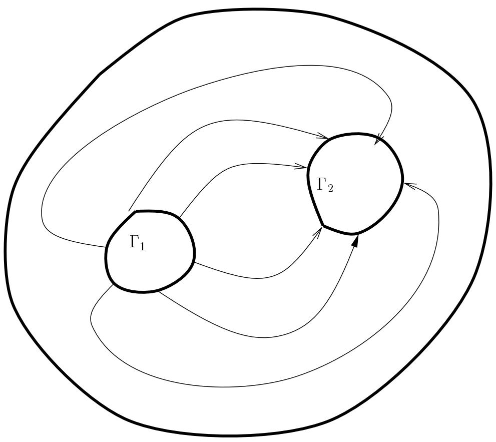


Fig. 4 – *Un champ de vitesse à divergence nulle tel que* $\int_{\Gamma_1} \mathbf{u}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}x = 1$ *et* $\int_{\Gamma_2} \mathbf{u}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}x = -1$ *pour lequel il n'existe pas de fonction courant.*

Le problème de l'existence de la fonction courant est encore plus difficile en trois dimensions ([DP86], [DD86], [Rou84]). De plus, alors que la formulation $(\mathbf{u}, p)$ ne fait intervenir que quatre champs, la formulation (ψ, ω) revient à en calculer six (trois pour le tourbillon et trois pour la fonction courant). Enfin, dans la formulation (ψ, ω), la pression est obtenue par un post-traitement du tourbillon, ce qui rajoute deux problèmes :

(i) si le tourbillon est mal calculé, l'erreur se répercutera sur le calcul de la pression,

(ii) les conditions limites à imposer sur la pression ne sont pas naturelles.

La formulation tourbillon-vitesse-pression est un outil mathématique pour généraliser la méthode MAC à des grilles complexes. Elle est valable en trois dimensions et les conditions limites qui en découlent sont naturelles et très générales. Dans toute la suite, on travaillera seulement en deux dimensions.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à la formulation variationnelle en dimension deux et aux résultats d'existence et d'unicité. C'est l'adaptation en $2D$ des résultats présentés dans l'article de François Dubois [Dub99].

Le deuxième chapitre présente le problème discret et les résultats numériques obtenus avec le code « OMEGA » écrit en 1996 lors de mon stage de DEA. « OMEGA » est un logiciel éléments finis (fortran 77) qui résout le problème de Stokes bidimensionnel en tourbillon-vitesse-pression. Les résultats obtenus sur des maillages réguliers sont satisfaisants, par contre ceux obtenus sur des maillages non structurés ne sont pas admissibles du point de vue de la mécanique des fluides. Il s'est avéré lors de l'étude théorique plus approfondie que c'est un problème de stabilité du schéma qui est ainsi mis en évidence par le cas test proposé par Bercovier et Engelman [BE79].

Un problème équivalent a déjà été rencontré dans un autre cadre plus classique qui est la résolution du problème de Stokes en fonction courant-tourbillon. Dans le chapitre 3, on compare deux codes, l'un en formulation tourbillon-vitesse-pression (OMEGA) et l'autre en formulation fonction courant-tourbillon (PSIOM). Ceci nous a permis de voir et de prouver que non seulement les deux formulations sont rigoureusement identiques dans le continu mais qu'elles le sont aussi dans le discret. Pour être plus précis, la formulation tourbillon-vitesse-pression apparaît comme une généralisation de la formulation fonction courant-tourbillon permettant la prise en compte de conditions aux limites plus générales, ainsi que le calcul de la pression. Les tourbillons calculés par les deux codes sont identiques à la précision machine près et les résultats des deux codes sont donc aussi peu satisfaisants du point de vue numérique.

En collaboration avec Michel Salaün, nous avons alors stabilisé numériquement la formulation tourbillon-vitesse-pression en rajoutant des fonctions bulles en vitesse (chapitre 4). Les résultats obtenus par cette méthode sont encourageants. Néanmoins le calcul de la pression reste difficile. Dans le cas d'une pression constante sur le bord du domaine, la pression est bien calculée et les résultats de convergence sont ceux attendus par l'erreur d'interpolation. Mais si la pression n'est pas constante sur le bord du domaine, le comportement de la version stabilisée est différent : l'erreur en pression reste importante (même si elle est considérablement améliorée par rapport au calcul non stabilisé) et la convergence sur les champs de pression et de tourbillon est ralentie.

Le chapitre 5 est consacré aux fonctions harmoniques discrètes mises en évidence en 1979 par R. Glowinski et O. Pironneau [GP79]. Grâce au lien entre la formulation tourbillon-vitesse-pression et la formulation fonction courant-tourbillon, il était plus facile de travailler ensuite sur cette dernière plus classique et ne prenant en compte que deux variables. L'objectif ici est d'observer et de cerner les problèmes que ces fonctions posent, et avec un code qui leur est exclusivement consacré obtenir des résultats numériques les concernant et en donner une image qualitative.

A la suite de ce travail d'analyse, nous proposons une méthode pour calculer ces fonctions harmoniques discrètes au mieux de sorte que le problème de Stokes en fonction courant-tourbillon est alors stable (chapitre 6 rédigé conjointement avec F. Dubois et M. Salaün). Nous montrons théoriquement et numériquement que nous améliorons alors à la fois l'aspect de la solution et l'ordre de convergence de la méthode. Les résultats numériques présentés sont très satisfaisants et confirment la théorie. L'idée est d'approcher les fonctions harmoniques à l'aide de fonctions harmoniques discrètes définies sur des maillages emboîtés récursivement, contenus dans le maillage initial.

Le chapitre 7 est l'application du résultat précédent à la formulation tourbillon-vitesse-pression.

2 Espaces fonctionnels et notations

Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ suffisamment régulier. Sa frontière $\partial\Omega$, supposée régulière, est notée Γ, la normale extérieure à cette frontière $\mathbf{n}$, le vecteur tangent $\mathbf{t}$, la base $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ étant directe. $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, de Ω dans $\mathbb{R}$, à support compact. $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable. On note $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de u par rapport à x_i. Pour tout entier $m \geq 0$ et tout réel p tel que $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions $v \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial^\alpha v}{\partial x_i}$ (au sens des distributions), avec $|\alpha| \leq m$, appartiennent à $L^p(\Omega)$. En particulier,

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \ , \ \forall i \in \{1,2\} \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$\text{et } H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \ , \ \forall i \in \{1,2\} \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in H^1(\Omega) \right\}.$$

On note $\| \bullet \|_{j,\Omega}$ (respectivement $|\bullet|_{j,\Omega}$) les normes (respectivement les semi-normes) dans les espaces de Sobolev $H^j(\Omega) = W^{j,2}(\Omega)$, $j = 1, 2$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ (respectivement $H_0^2(\Omega)$) est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans la norme $\| \bullet \|_{1,\Omega}$ (respectivement $\| \bullet \|_{2,\Omega}$). On réfère à Adams [Ada75] pour la théorie sur les espaces de Sobolev.
Dans toute la suite, on notera $(\bullet, \bullet)$ les produits scalaires, $< \bullet, \bullet >$ les produits de dualité sur le domaine et $< \bullet, \bullet >_\Gamma$ ceux au bord du domaine. On définit formellement les deux rotationnels en dimension deux :

- le rotationnel vecteur, noté **rot**, qui s'applique sur les fonctions scalaires :

$$\mathbf{rot}\ \omega = \begin{pmatrix} \partial_2 \omega \\ -\partial_1 \omega \end{pmatrix}$$

– le rotationnel scalaire, noté rot, qui s'applique sur les vecteurs :

$$\text{rot } \mathbf{u} = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \text{ pour tout } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

On définit ensuite les espaces fonctionnels qui vont être utiles :

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \ / \ \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \ \right\}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme $\| \mathbf{v} \|_{\text{div},\Omega} = \sqrt{\| \mathbf{v} \|^2_{0,\Omega} + \| \text{div } \mathbf{v} \|^2_{0,\Omega}}$, et l'espace $H(\mathbf{rot}, \Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \ / \ \mathbf{rot} \ \varphi \in (L^2(\Omega))^2 \ \right\}$.

Remarque 0.2.1 *Cet espace $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ est, en dimension deux, confondu avec l'espace $H^1(\Omega)$, on utilisera donc indifféremment les normes $H(\mathbf{rot})$ et H^1 :*

$$\| \varphi \|_{\text{rot},\Omega} = \sqrt{\| \varphi \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot} \ \varphi \|^2_{0,\Omega}} = \| \varphi \|_{1,\Omega} .$$

Enfin l'espace $H(\text{rot}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \ / \ \text{rot } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \ \right\}$ est aussi un espace de Hilbert pour la norme,

$$\| \mathbf{v} \|_{\text{rot},\Omega} = \sqrt{\| \mathbf{v} \|^2_{0,\Omega} + \| \text{rot } \mathbf{v} \|^2_{0,\Omega}}$$

et $L^2_0(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle.

Traces

Rappelons le théorème de trace dans les espaces de Sobolev (Lions-Magenes [LM68] p. 47).
On suppose que $\Gamma = \partial\Omega$ est une variété indéfiniment différentiable de dimension 1, Ω étant localement d'un seul côté de Γ et borné.
Alors l'application

$$\gamma : u \longmapsto \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{n}^j} \ / \ j = 0, 1, \ldots, \mu \right\}$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow (\mathcal{D}(\Gamma))^{\mu+1}$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue

$$\gamma : u \longmapsto \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{n}^j} \ / \ j = 0, 1, \ldots, \mu \right\} \text{ de } H^s(\Omega) \text{ à valeurs dans } \prod_{j=0}^{\mu} H^{s-j-1/2}(\Gamma),$$

où μ est le plus grand entier positif ou nul tel que $\mu < s - \dfrac{1}{2}$.

L'application γ est surjective et il existe un relèvement continu $\displaystyle\prod_{j=0}^{\mu} H^{s-j-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^s(\Omega)$.

On rappelle aussi qu'il existe une fonction continue γ_n surjective de $H(\text{div}, \Omega)$ sur $H^{-1/2}(\Gamma)$ qui à tout $\mathbf{v}$ de $H(\text{div}, \Omega)$ associe sa trace normale $\mathbf{v}.\mathbf{n}$ sur Γ (voir par exemple [GR86]). On a alors la formule de Green suivante vraie pour toute fonction $\mathbf{v}$ de $H(\text{div}, \Omega)$, et toute fonction φ de $H^1(\Omega)$:

$$(\text{div } \mathbf{v}, \varphi) + (\nabla\varphi, \mathbf{v}) = < \mathbf{v}.\mathbf{n}, \gamma\varphi >_\Gamma .$$

De même à tout $\mathbf{v}$ de $H(\text{rot}, \Omega)$ on associe sa trace tangentielle γ_t telle que $\gamma_t \mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{t}$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ (où $\mathbf{t}$ est le vecteur tangent au bord). On a la formule de Green, vraie pour toute fonction $\mathbf{v}$ de $H(\text{rot}, \Omega)$, et toute fonction φ de $H^1(\Omega)$:

$$(\text{rot } \mathbf{v}, \varphi) - (\mathbf{rot} \ \varphi, \mathbf{v}) = < \mathbf{v}.\mathbf{t}, \gamma\varphi >_\Gamma .$$

On appelle $H_0(\text{div},\Omega)$ et $H_0(\text{rot},\Omega)$ les sous-espaces de $H(\text{div},\Omega)$ et $H(\text{rot},\Omega)$ suivants :

$$H_0(\text{div},\Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div},\Omega); \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

$$H_0(\text{rot},\Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\text{rot},\Omega)\ ;\ \mathbf{v}.\mathbf{t} = 0 \text{ sur } \Gamma\}\,.$$

Chapitre 1

Formulation triple du problème de Stokes bidimensionnel

1.1 Formulation variationnelle en tourbillon - vitesse - pression

Soit Ω un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^2$. On note $\Gamma = \partial\Omega$, sa frontière, qu'on suppose régulière. On considère le problème de Stokes bidimensionnel, avec les variables primales, sans condition limite particulière.

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} & = & 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide, p sa pression, $\nu > 0$ la viscosité cinématique et $\mathbf{f}$ un champ de forces donné.

Dans les équations précédentes, on introduit le tourbillon (ou vorticité) ω qui est égal au rotationnel de $\mathbf{u}$ c'est-à-dire $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ (en dimension deux, cette variable est scalaire). En utilisant la formule classique : $\mathbf{rot}$ rot $\mathbf{u} - \nabla(\text{div } \mathbf{u}) = -\Delta\mathbf{u}$, la première équation de (1.1) s'écrit ν $\mathbf{rot}$ $\omega + \nabla p = \mathbf{f}$, ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\omega - \text{rot } \mathbf{u} \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1.2}$$

$$\nu \; \mathbf{rot}\; \omega + \nabla p \;=\; \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \tag{1.3}$$

$$\text{div } \mathbf{u} \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{1.4}$$

Multiplions l'équation (1.2) par une fonction test φ de $H^1(\Omega)$ (ou $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ puisque en dimension deux, ils sont confondus, *cf* : remarque dans l'introduction) et intégrons formellement par parties :

$$(\omega, \varphi) - (\text{rot } \mathbf{u}, \varphi) = (\omega, \varphi) - (\mathbf{rot}\ \varphi, \mathbf{u}) - < \mathbf{u}.\mathbf{t}, \gamma\varphi >_\Gamma$$

soit

$$(\omega, \varphi) - (\mathbf{rot}\ \varphi, \mathbf{u}) = \; < \mathbf{u}.\mathbf{t}, \gamma\varphi >_\Gamma$$

où $\mathbf{t}$ est le vecteur tangent au bord.
Multiplions l'équation (1.3) par $\mathbf{v}$ dans $H(\text{div}, \Omega)$. Comme formellement

$$(\nabla p, \mathbf{v}) = -(p, \text{div } \mathbf{v}) + < p, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma$$

il vient

$$\nu(\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v}) - (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - < p, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à la surface.

Remarque 1.1.1 *Dans la formule* $\mathbf{rot}$ rot $\mathbf{u} - \nabla(\mathrm{div}\ \mathbf{u}) = -\Delta\mathbf{u}$, *on présuppose que* div $\mathbf{u}$ *est nul, ce qui fait disparaître ce terme. En fait, il est possible de le garder et l'équation s'écrit alors :*

$$\nu\ \mathbf{rot}\ \omega - \nu\nabla\mathrm{div}\ \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}.$$

Ce qui donne après multiplication par $\mathbf{v}$ *dans* $H(div, \Omega)$ *et intégration par parties :*

$$\nu(\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v}) + \nu(\mathrm{div}\ \mathbf{u}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) - (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - < p - \nu\ \mathrm{div}\ \mathbf{u}, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma .$$

Multiplions enfin l'équation (1.4) par q dans $L^2(\Omega)$ ou $L^2_0(\Omega)$ s'il n'y a pas de condition limite en pression et que la pression est alors définie à une constante additive près. On notera désormais $L^2_{(0)}(\Omega)$ pour ne pas rappeller cette alternative à chaque fois.

$$(\mathrm{div}\ \mathbf{u}, q) = 0.$$

On obtient finalement le sytème formel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega, \varphi) - (\mathbf{rot}\ \varphi, \mathbf{u}) & = & < \mathbf{u}.\mathbf{t}, \varphi >_\Gamma & \forall\ \varphi \in H^1(\Omega) \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v}) - (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - < p, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma & \forall\ \mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega) \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}, q) & = & 0 & \forall\ q \in L^2_{(0)}(\Omega). \end{array}\right.$$

Les espaces fonctionnels et les conditions limites :

Les conditions limites que l'on peut imposer découlent de façon naturelle des termes de bord qui apparaissent dans la formulation. Il va néanmoins falloir leur donner un sens mathématique. Pour cela, on a besoin de la définition et de la proposition suivantes :

Définition 1.1.2 *L'espace* $H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)$ *[LM68].*
Soit Γ_1, Γ_2 *une partition de la frontière* Γ :

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset\ ,\ \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \Gamma$$

et γ *l'opérateur trace de* $H^1(\Omega)$ *dans* $H^{1/2}(\Gamma)$. *On appelle* $H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)$ *l'espace des fonctions scalaires dont la trace est nulle sur la partie* Γ_2 *du bord :*

$$H^{1/2}_{00}(\Gamma_1) = \left\{\gamma\varphi,\ \varphi \in H^1(\Omega)\ ,\ \gamma\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_2\right\}.$$

Proposition 1.1.3 *Théorème de trace pour* $H(\mathrm{div}, \Omega)$ *et* $H(\mathrm{rot}, \Omega)$.
Il existe un opérateur de trace continu toujours noté $\gamma_{\mathbf{n}}$ *tel que :*

$$\gamma_n : H(\mathrm{div}, \Omega) \ni \mathbf{v} \longrightarrow \gamma_n.\mathbf{v} \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma_1))'\ ,\ \gamma_n.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{n} \text{ si } \mathbf{v} \text{ est régulier.}$$

De même il existe un opérateur de trace continu toujours noté γ_t *tel que*

$$\gamma_t : H(\mathrm{rot}, \Omega) \ni \mathbf{w} \longrightarrow \gamma_t.\mathbf{w} \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma_1))'\ ,\ \gamma_t.\mathbf{w} = \mathbf{w}.\mathbf{t} \text{ si } \mathbf{w} \text{ est régulier.}$$

preuve

Soit $\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ et $\xi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ une fonction régulière dont la trace est nulle sur une partie Γ_2 du bord. On définit $\gamma_n.\mathbf{v}$ agissant sur ξ comme suit :

$$< \gamma_n.\mathbf{v}, \gamma\xi >_\Gamma = (\mathbf{v}, \nabla\xi) + (\mathrm{div}\ \mathbf{v}, \xi) \tag{1.5}$$

et on a la propriété de continuité :

$$| < \gamma_n.\mathbf{v}, \gamma\xi >_\Gamma | \leq 2 \parallel \mathbf{v} \parallel_{\mathrm{div},\Omega} \parallel \xi \parallel_{1,\Omega} .$$

Par la formule de Green (*cf* introduction) il est clair que $\gamma_n.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{n}$ quand $\mathbf{v}$ est suffisamment régulier. Comme la partie droite de l'égalité (1.5) ne dépend que de la trace de ξ sur le bord du domaine (si $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $< \gamma_n.\mathbf{v}, \gamma\xi >_\Gamma = 0$), on en déduit que :

$$| < \gamma_n.\mathbf{v}, \gamma\xi >_\Gamma | \leq 2 \parallel \mathbf{v} \parallel_{\mathrm{div},\Omega} \inf_{\varphi \in H^1(\Omega)\ ,\ \gamma\varphi = \gamma\xi} \parallel \varphi \parallel_{1,\Omega} .$$

Par le théorème de relèvement de J.L. Lions (voir [LM68]), il existe une constante C indépendante de ξ telle que :

$$\inf_{\varphi \in H^1(\Omega)\ ,\ \gamma\varphi = \gamma\xi} \parallel \varphi \parallel_{1,\Omega} \leq C \parallel \gamma\xi \parallel_{1/2,\Gamma} .$$

Enfin, comme l'espace $\left\{\xi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ \gamma\xi = 0 \text{ sur } \Gamma_2\right\}$ est dense dans $H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)$ [LM68], $\gamma_n.\mathbf{v}$ est défini pour tout $\eta \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)$ et on a :

$$| < \gamma_n.\mathbf{v}, \eta >_\Gamma | \leq 2\ C \parallel \mathbf{v} \parallel_{\mathrm{div},\Omega} \quad \parallel \eta \parallel_{1/2,\Gamma} .$$

Ce qui prouve le premier point de la proposition.

Pour le deuxième point, la démarche est exactement la même.

Soit $\mathbf{w} \in H(\mathrm{rot}, \Omega)$ et $\chi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ une fonction régulière dont la trace est nulle sur une partie Γ_2. On définit $\gamma_t.\mathbf{v}$ agissant sur χ comme suit :

$$< \gamma_t.\mathbf{w}, \gamma\chi >_\Gamma = (\mathbf{w}, \mathbf{rot}\ \chi) - (\mathrm{rot}\ \mathbf{w}, \chi) \tag{1.6}$$

et on a la propriété de continuité :

$$| < \gamma_t.\mathbf{w}, \gamma\chi >_\Gamma | \leq 2 \parallel \mathbf{w} \parallel_{\mathrm{rot},\Omega} \quad \parallel \chi \parallel_{1,\Omega} .$$

Par la formule de Green (*cf* introduction) il est clair que $\gamma_t.\mathbf{w} = \mathbf{w}.\mathbf{t}$ quand $\mathbf{w}$ est suffisamment régulier. Comme la partie droite de l'égalité (1.6) ne dépend que de la trace de χ sur le bord du domaine (si $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $< \gamma_t.\mathbf{w}, \gamma\chi >_\Gamma = 0$), on voit que :

$$| < \gamma_t.\mathbf{w}, \gamma\chi >_\Gamma | \leq 2 \parallel \mathbf{w} \parallel_{\mathrm{rot},\Omega} \inf_{\varphi \in H^1(\Omega)\ ,\ \gamma\varphi = \gamma\chi} \parallel \varphi \parallel_{1,\Omega} .$$

Par le théorème de relèvement de J.L. Lions (voir [LM68]), il existe une constante C indépendante de χ telle que :

$$\inf_{\varphi \in H^1(\Omega)\ ,\ \gamma\varphi = \gamma\chi} \parallel \varphi \parallel_{1,\Omega} \leq C \parallel \gamma\chi \parallel_{1/2,\Gamma} .$$

Donc comme $\left\{\xi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ \gamma\xi = 0 \text{ sur } \Gamma_2\right\}$ est dense dans $H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)$, $\gamma_t.\mathbf{w}$ est défini pour tout $\eta \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)$ et on a

$$| < \gamma_t.\mathbf{w}, \eta >_\Gamma | \leq 2\ C \parallel \mathbf{w} \parallel_{\mathrm{rot},\Omega} \quad \parallel \eta \parallel_{1/2,\Gamma} .$$

Le deuxième point est démontré. ■

Donnons maintenant un sens aux termes de bord $< \mathbf{u}.\mathbf{t}, \gamma\varphi >_\Gamma$ et $< p, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma$ qui apparaissent dans la formulation : supposons que φ, qui est un élément de $H^1(\Omega)$, soit donné sur une partie Γ_ω de la frontière Γ,

$$\gamma\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_\omega$$

et que $\mathbf{v}.\mathbf{n}$ soit aussi donné sur une autre partie Γ_n du bord :

$$\mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n.$$

On introduit alors les complémentaires de Γ_ω et Γ_n dans Γ :

$$\Gamma_t \cap \Gamma_\omega = \emptyset \ , \ \overline{\Gamma}_t \cup \overline{\Gamma}_\omega = \Gamma$$

$$\Gamma_n \cap \Gamma_p = \emptyset \ , \ \overline{\Gamma}_n \cup \overline{\Gamma}_p = \Gamma.$$

Considérons maintenant τ_0 dans l'espace $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_t))'$ et Π_0 dans l'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma_p)$. Alors d'après la définition (1.1.2) et la proposition (1.1.3), les produits de dualité :

$$< \tau_0, \gamma\varphi >_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_t))', H_{00}^{1/2}(\Gamma_t)}$$

et

$$< \Pi_0, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_p), (H_{00}^{1/2}(\Gamma_p))'}$$

sont bien définis.

Sur les parties complémentaires, on a deux conditions de Dirichlet sur le tourbillon et sur la vitesse normale. Regardons, en s'appuyant sur l'exemple du problème de Dirichlet-Neumann pour le laplacien, à quels espaces doivent appartenir ces conditions dans le cas non homogène. Considérons pour un temps le problème suivant, on cherche $\mu \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\mu & = & f & \text{dans } \Omega \\ \mu & = & \mu_0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial\mathbf{n}} & = & g & \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right.$$

avec $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \partial\Omega$ et $\mu_0 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. Soit $\widetilde{\mu}_0$ le relèvement dans $H^1(\Omega)$ de μ_0 (surjectivité de l'application trace). Alors la fonction $\mu - \tilde{\mu}_0 = \nu$ appartient à $H_0^1(\Omega, \Gamma_1)$ et vérifie le problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\nu & = & f + \Delta\tilde{\mu}_0 & \text{dans } \Omega \\ \nu & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial\nu}{\partial\mathbf{n}} & = & g - \dfrac{\partial\tilde{\mu}_0}{\partial\mathbf{n}} & \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Alors $g - \dfrac{\partial\tilde{\mu}_0}{\partial\mathbf{n}}$ est une condition de Neumann définie naturellement dans l'espace $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))'$ car :

$$(\nabla\mu, \nabla v) = (f, v) + < g - \frac{\partial\tilde{\mu}_0}{\partial\mathbf{n}}, v >_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))', H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, \Gamma_1).$$

En raisonnant de la même façon pour notre problème on obtient que l'espace $H^{1/2}(\Gamma_\omega)$ est le bon espace pour la condition de Dirichlet non homogène sur le tourbillon :

$$\gamma\omega|_{\Gamma_\omega} = \omega_0 \text{ avec } \omega_0 \in H^{1/2}(\Gamma_\omega).$$

Pour la condition de Dirichlet non homogène sur la vitesse normale, il est nécessaire de préciser la proposition suivante :

Proposition 1.1.4 *Surjectivité de la trace.*
L'opérateur de trace γ_n défini dans la proposition (1.1.3) de $H(\mathrm{div},\Omega)$ sur $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))'$ est surjectif.

<u>Preuve</u>
Soit $g \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))'$, on définit $\nu \in H_0^1(\Omega,\Gamma_1)$ l'unique solution du problème de Dirichlet-Neumann suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\nu & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \nu & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial\nu}{\partial\mathbf{n}} & = & g & \text{sur } \Gamma_2. \end{array}\right.$$

Posons $\mathbf{v} = \nabla\nu$, alors $\mathbf{v}$ appartient à $H(\mathrm{div},\Omega)$ car :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2, \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0 \in L^2(\Omega). \end{array}\right.$$

La trace normale de $\mathbf{v}$ est alors bien définie et vaut :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \mathbf{v}.\mathbf{n} = g \text{ sur } \Gamma_2. \end{array}\right.$$

On a montré que pour tout $g \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))'$, on peut trouver un unique $\mathbf{v}$ dans $H(\mathrm{div},\Omega)$, tel que $\gamma_n\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{n} = g$ sur Γ_2. ■
On obtient alors pour la condition de Dirichlet non homogène sur la vitesse normale :

$$\mathbf{u}.\mathbf{n}|_{\Gamma_n} = u_0 \text{ avec } u_0 \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma_n))'.$$

Les conditions limites sur la première partition ainsi définie sont :

$$\gamma\omega|_{\Gamma_\omega} = \omega_0 \text{ (condition de Dirichlet) avec } \omega_0 \in H^{1/2}(\Gamma_\omega).$$

La donnée τ_0 dans $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_t))'$ est une condition de Neumann naturelle sur la vitesse tangentielle. Et pour l'autre partition de la frontière *a priori* **indépendante** de la première, les conditions limites pour la pression et la vitesse normale sont :

$$\mathbf{u}.\mathbf{n}_{|\Gamma_n} = u_0 \text{ (condition de Dirichlet) avec } u_0 \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma_n))'.$$

La donnée Π_0 dans $H_{00}^{1/2}(\Gamma_p)$ est une condition de Neumann naturelle sur la pression.

Remarque 1.1.5
- *Les objets $\mathbf{u}.\mathbf{t}|_{\Gamma_t}$ (trace tangentielle de la vitesse) et $p|_{\Gamma_p}$ (trace de la pression) ne sont pas définis dans les espaces respectifs $H(\mathrm{div},\Omega)$ et $L^2(\Omega)$.*
- *Avec la remarque (1.1.1), la deuxième condition de Neumann porte non pas sur la pression seule mais sur $(p - \nu\ \mathrm{div}\ \mathbf{u})|_{\Gamma_p}$ [Poi99].*

Bilan

Lorsque l'on se restreint aux conditions de Dirichlet homogènes, les bons espaces fonctionnels pour la nouvelle formulation sont *a priori* les suivants : le tourbillon ω doit donc appartenir à l'espace que l'on notera
$W = \{\varphi \in L^2(\Omega) \; / \; \mathbf{rot} \; \varphi \in (L^2(\Omega))^2 \; ; \; \gamma\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_\omega\}$,
la vitesse $\mathbf{u}$ est cherchée dans
$X = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \; / \; \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega); \gamma_n \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma\}$
et enfin la pression p dans :

$$Y = L^2_{(0)}(\Omega) = \begin{cases} L^2(\Omega) & \text{si mes}(\Gamma_p) > 0 \\ \left\{ q \in L^2(\Omega), \; (q, 1) = \displaystyle\int_\Omega q \, \mathrm{d}x = 0 \right\} & \text{si mes}(\Gamma_p) = 0. \end{cases}$$

Le problème que l'on cherche à résoudre s'écrit désormais :
Trouver $(\omega, \mathbf{u}, p)$ dans $W \times X \times Y$ tels que

$$\begin{cases} (\omega, \varphi) - (\mathbf{u}, \mathbf{rot} \; \varphi) & = & < \tau_0, \varphi >_\Gamma & \forall \; \varphi \in W \\ \nu \; (\mathbf{rot} \; \omega, \mathbf{v}) - (p, \text{div } \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - < \Pi_0, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma & \forall \; \mathbf{v} \in X \\ (\text{div } \mathbf{u}, q) & = & 0 & \forall \; q \in Y. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.2 Formulation abstraite

Soient Z et Y deux espaces de Hilbert, de produits scalaires respectifs $(\; , \;)_Z$ et $(\; , \;)_Y$, de normes respectives $\| \; . \; \|_Z$ et $\| \; . \; \|_Y$. Soient ensuite W sous-espace de Y et X sous-espace de Z, dotés d'une structure hilbertienne (on note $(.,.)_W$, $(.,.)_X$ le produit scalaire et $\| \; . \; \|_W, \| \; . \; \|_X$ les normes associées) et on suppose que l'on a :

$$\| \varphi \|_W \geq \| \varphi \|_Y \tag{1.8}$$

$$\| \varphi \|_X \geq \| \varphi \|_Z \; . \tag{1.9}$$

Enfin, on se donne deux fonctions continues $R : W \longrightarrow Z$ et $D : X \longrightarrow Y$ et on définit les différents sous-espaces orthogonaux de leurs noyaux et de l'image de R :

$$(\text{Ker}R)^\perp = \{\varphi \in W, \; (\varphi, w)_W = 0, \; \forall \; w \in \text{Ker}R\} \tag{1.10}$$
$$(\text{Ker}R)^\sqcup = \{z \in Z, \; (z, w)_Z = 0, \; \forall \; w \in \text{Ker}R\} \tag{1.11}$$
$$(\text{Ker}D)^\perp = \{v \in X, \; (v, x)_X = 0, \; \forall \; x \in \text{Ker}D\} \tag{1.12}$$
$$(\text{Ker}D)^\sqcup = \{z \in Z, \; (z, x)_Z = 0, \; \forall \; x \in \text{Ker}D\} \tag{1.13}$$
$$(\text{Im}R)^\sqcup = \{z \in Z, \; (z, R \; \varphi)_Z = 0, \; \forall \; \varphi \in W\} \; . \tag{1.14}$$

Théorème 1.2.1 *Formulation variationnelle triple mixte.*
Avec les hypothèses suivantes :

(i)

$$(\text{Ker}D)^\sqcup \subset (\text{Im}R)^\sqcup \tag{1.15}$$

(ii)

$$\exists \; a > 0 \; , \; \inf_{\substack{q \in Y \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{(Dv, q)_Y}{\| v \|_X \| q \|_Y} \geq a \tag{1.16}$$

(iii)

$$\exists\ b > 0\ ,\quad \inf_{\substack{v \in \mathrm{Ker} D \\ v \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \frac{(v, R\varphi)_Z}{\parallel v \parallel_X \parallel \varphi \parallel_W} \geq b \tag{1.17}$$

(iv)

$$\exists\ d > 0\ ,\ \forall \varphi \in \mathrm{Ker} R\ ,\ (\varphi, \varphi)_Y \geq d \parallel \varphi \parallel_W^2 \tag{1.18}$$

pour tout $\sigma = (\lambda, \mu, \nu) \in W' \times X' \times Y'$ *le problème :*
chercher $\xi = (\omega, u, p) \in W \times X \times Y$ *de sorte que quelque soit* $\eta = (\varphi, v, q) \in W \times X \times Y$*,*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega, \varphi)_W + (u, R\varphi)_Z & = & < \lambda, \varphi > & \forall \varphi \in W \\ (v, R\omega)_Z + (p, Dv)_Y & = & < \mu, v > & \forall v \in X \\ (Du, q)_Y & = & < \nu, q > & \forall q \in Y, \end{array} \right. \tag{1.19}$$

a une unique solution $(\omega(\sigma), u(\sigma), p(\sigma)) \in W \times X \times Y$ *qui dépend continûment des données* $\sigma = (\lambda, \mu, \nu)$ *soit :*

$$\exists\ C > 0\ ,\ \forall \sigma \in W' \times X' \times Y' \overset{\text{noté}}{=} H'\ ,\ \parallel \omega(\sigma) \parallel_W + \parallel u(\sigma) \parallel_X + \parallel p(\sigma) \parallel_Y \leq C \parallel \sigma \parallel_{H'}\ .$$

<u>Preuve</u>
On ne donne ici qu'un aperçu de cette preuve que l'on trouvera dans [Dub99] (la preuve est faite dans $\mathbb{R}^3$ mais la dimension de l'espace n'intervient pas).
On définit i l'injection canonique de $W \longrightarrow Y$, j l'injection canonique de $X \longrightarrow Z$, et les isomorphismes de Riesz suivants $k : Z \longrightarrow Z'$ et $l : Y \longrightarrow Y'$:

$$k : Z \ni z \longmapsto kz = (Z \ni w \longmapsto < kz, w >_{Z',Z} = (z, w)_Z \in \mathbb{R}) \in Z',$$

$$l : Y \ni q \longmapsto lq = (Y \ni q \longmapsto < lq, w >_{Y',Y} = (w, q)_Y \in \mathbb{R}) \in Y'.$$

Enfin, on introduit $D' : Y' \longrightarrow X'$ et $R' : Z' \longrightarrow W'$ les opérateurs duaux de D et R respectivement définis par :

$$< D'\zeta, x >_{X',X} = < \zeta, Dx >_{Y',Y},\quad \forall \zeta \in Y',\ \forall x \in X$$

$$< R'\eta, \varphi >_{W',W} = < \eta, R\varphi >_{Z',Z},\quad \forall \eta \in Z',\ \forall \varphi \in W.$$

Alors les produits scalaires présents dans (1.19) se réécrivent sous la forme suivante en termes de dualité :

$$\begin{array}{rcll} (\omega, \varphi)_W & = & < i'li\omega, \varphi >_{W',W}, & \forall \omega \in W,\ \forall \varphi \in W \\ (u, R\varphi)_{XZ} & = & < R'kju, \varphi >_{W',W}, & \forall u \in X,\ \forall \varphi \in W \\ (v, R\omega)_{XZ} & = & < j'kR\omega, v >_{X',X}, & \forall v \in X,\ \forall \omega \in W \\ (p, Dv)_Y & = & < D'lp, v >_{X',X}, & \forall v \in X,\ \forall p \in Y \\ (Du, q)_Y & = & < lDu, q >_{Y',Y} & \forall u \in X,\ \forall q \in Y. \end{array}$$

On introduit alors l'opérateur $A : W \times X \times Y \longrightarrow W' \times X' \times Y'$ représenté par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} i'li & R'kj & 0 \\ j'kR & 0 & D'l \\ 0 & lD & 0 \end{pmatrix}$$

Cet opérateur n'est autre que l'écriture du problème (1.19) en termes matriciels.
Il suffit alors de démontrer que l'opérateur A qui à $\xi \in W \times X \times Y$ associe $\sigma \in W' \times X' \times Y'$ tel que $A\xi = \sigma$ est un opérateur bijectif. ■

1.3 Représentation de champs de vecteurs

Cette partie est reprise de [Dub99] et adaptée à la seule dimension 2.
Soit Ω un domaine borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$ de classe au moins $\mathcal{C}^2$. On suppose que cette frontière se décompose en deux parties Γ_1 et Γ_2 telles que :

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \ , \ \ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

On suppose de plus que l'intersection $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ est constituée d'un nombre fini de points.
On définit les espaces suivants pour $j \in \{1, 2\}$:

$$H_0^1(\Omega; \Gamma_j) = \begin{cases} \{\zeta \in H^1(\Omega), \ \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_j\} & \text{si mes}(\Gamma_j) > 0. \\ \{\zeta \in H^1(\Omega), \ (\zeta, 1) = 0\} & \text{si mes}(\Gamma_j) = 0. \end{cases}$$

On définit de plus $H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ l'espace des vecteurs de $(H^1(\Omega))^2$ qui sont tangents sur Γ_1 et colinéaires à la normale sur Γ_2 :

$$H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in (H^1(\Omega))^2, \ \boldsymbol{\varphi}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \ \boldsymbol{\varphi}.\mathbf{t} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \right\},$$

et $M^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ un sous-espace de $H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ par annulation des opérateurs div et rot :

$$\begin{aligned} M^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) \quad = \quad & \{\boldsymbol{\mu} \in (H^1(\Omega))^2, \ \text{div } \boldsymbol{\mu} = 0 \ , \ \text{rot } \boldsymbol{\mu} = 0 \ , \\ & \boldsymbol{\mu}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \ , \ \boldsymbol{\mu}.\mathbf{t} = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}. \end{aligned}$$

On rappelle le théorème de Peetre et Tartar dont on aura besoin dans la suite.

Théorème 1.3.1 *Théorème de Peetre et Tartar [Pee61], [Tar76].*
Soient E_0, E_1, E_2 des espaces de Banach. A_1 et A_2 deux applications linéaires continues, respectivement de E_0 dans E_1 et de E_0 dans E_2 telles que :

(i)

$$A_2 \textit{ est compacte,}$$

(ii)

$$\exists C > 0, \ \forall v \in E_0, \| \, v \, \|_{E_0} \leq C \ \left(\| \, A_1 v \, \|_{E_1} + \| \, A_2 v \, \|_{E_2} \right) \tag{1.20}$$

Alors

(i) Le noyau Ker A_1 est de dimension finie, Im A_1 est un sous-espace fermé de E_2.

(ii) Il existe une constante C_0 telle que :

$$\inf_{w \in Ker \ A_1} \|v + w\|_{E_0} \leq C_0 \ \|A_1 v\|_{E_1} \quad \forall v \in E_0. \tag{1.21}$$

Lemme 1.3.2 *Sous les hypothèses précédemment faites sur le domaine, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$:*

$$\| \, \boldsymbol{\varphi} \, \|_{1,\Omega} \leq C \ \left(\| \, \boldsymbol{\varphi} \, \|_{0,\Omega}^2 + \| \, \text{div } \boldsymbol{\varphi} \, \|_{0,\Omega}^2 + \| \, \text{rot } \boldsymbol{\varphi} \, \|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \tag{1.22}$$

preuve

- Soit $\boldsymbol{\varphi}$ et $\boldsymbol{\psi}$ deux champs de vecteurs réguliers sur Ω. On commence par développer l'intégrale suivante :

$$(-\Delta\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega (\mathbf{rot}\ \mathrm{rot}\ \varphi - \nabla(\mathrm{div})\ \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})\ \mathrm{d}x,$$

et en intégrant par parties chacun des trois termes du second ordre, il vient

$$\begin{aligned}(\nabla\boldsymbol{\varphi}, \nabla\boldsymbol{\psi}) &= (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\varphi}, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\psi}) + (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi}, \mathrm{div}\ \boldsymbol{\psi}) \\ &+ < \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{n}}, \boldsymbol{\psi} >_\Gamma + < \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}.\mathbf{t} >_\Gamma - < \mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}.\mathbf{n} >_\Gamma . \end{aligned} \tag{1.23}$$

- A l'aide des résultats de Bendali [Ben84], il est possible de majorer les termes de bord apparaissant dans (1.23). On commence par faire $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ dans (1.23) et dans un premier temps, on suppose que $\varphi.\mathbf{n} = 0$ sur Γ_1. On obtient donc pour $\boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}))^2 \cap H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$, donc tel que $\boldsymbol{\varphi}.\mathbf{n} = 0$ sur Γ_1 :

$$\left| \int_{\Gamma_1} \left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{n}}, \boldsymbol{\psi} \right) + (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}.\mathbf{t}) \right] \mathrm{d}\gamma \right| \leq C \int_{\Gamma_1} |\boldsymbol{\varphi}|^2\, \mathrm{d}\gamma. \tag{1.24}$$

Dans un deuxième temps, on suppose toujours que φ appartient à $(\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}))^2 \cap H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ et on utilise cette fois que $\boldsymbol{\varphi}.\mathbf{t} = 0$ sur Γ_2 pour obtenir :

$$\left| \int_{\Gamma_2} \left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{n}}, \boldsymbol{\psi} \right) + (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}.\mathbf{n}) \right] \mathrm{d}\gamma \right| \leq C \int_{\Gamma_2} |\boldsymbol{\varphi}|^2\, \mathrm{d}\gamma. \tag{1.25}$$

En sommant (1.24) et (1.25) dans (1.23), il vient l'estimation suivante :

$$\forall\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}))^2 \cap H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) \quad \| \nabla\boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega} \quad \leq \quad \| \mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega}^2 + \| \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega}^2 + C \int_\Gamma |\boldsymbol{\varphi}|^2\, \mathrm{d}\gamma.$$

Or comme l'espace $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}))^2 \cap H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ est dense dans l'espace $H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ [Dub99], la dernière relation reste vraie dans $H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ avec la trace de φ dans $(H^{1/2}(\Gamma))^2$:

$$\| \nabla\boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega}^2 \quad \leq \quad \| \mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega}^2 + \| \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega}^2 + C \int_\Gamma |\gamma\boldsymbol{\varphi}|^2\, \mathrm{d}\gamma \quad \forall\boldsymbol{\varphi} \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2). \tag{1.26}$$

- On utilise maintenant le théorème de Peetre-Tartar avec les espaces suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_0 &=& H_0^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) \\ E_1 &=& L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ E_2 &=& (L^2(\Gamma))^2 \end{array} \right.$$

et les applications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_1\boldsymbol{\varphi} &=& (\boldsymbol{\varphi}, \mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi}, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\varphi}) \\ A_2\boldsymbol{\varphi} &=& \gamma\boldsymbol{\varphi}. \end{array} \right.$$

La relation (1.26) n'est autre que l'hypothèse (1.20) nécessaire à l'application du théorème de Peetre-Tartar. De plus, comme l'injection $(H^{1/2}(\Gamma))^2 \ni \boldsymbol{\xi} \longmapsto \boldsymbol{\xi} \in (L^2(\Gamma))^2$ est compacte (voir par exemple [LM68]), l'application A_2 est compacte. Enfin il est clair que Ker $A_1 = \{0\}$ et le deuxième point (1.21) donne l'existence d'une constante $C_0 > 0$ telle que :

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H_0^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2), \quad \| \boldsymbol{\varphi} \|_{1,\Omega} \leq C_0 \left(\| \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega} + \| \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega} + \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega} \right).$$

Cette dernière inégalité est clairement équivalente à (1.22) et la proposition est donc établie. ■

Proposition 1.3.3 *L'espace $M^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ est de dimension finie.*

preuve
On applique à nouveau le théorème de Peetre-Tartar avec cette fois le choix d'espaces et d'applications suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E_0 & = & H_0^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) \text{ muni de la norme équivalente} \\ & & \| \varphi \|_{E_0} \equiv \left(\| \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega}^2 + \| \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega}^2 + \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} \|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \\ E_1 & = & L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ E_2 & = & (L^2(\Gamma))^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_1 \boldsymbol{\varphi} & = & (\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}) \\ A_2 \boldsymbol{\varphi} & = & \boldsymbol{\varphi}. \end{array} \right.$$

Comme Ω est borné, l'injection $(H^1(\Omega))^2 \hookrightarrow (L^2(\Omega))^2$ est compacte (théorème de Rellich) et par composition A_2 est aussi compacte. L'hypothèse (1.20) est vérifiée (c'est (1.22)) et comme Ker $A_1 = M^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$, ce dernier est de dimension finie d'après le théorème (1.3.1). ■

On définit enfin l'espace $M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ des vecteurs de $(L^2(\Omega))^2$ dont la divergence et le rotationnel sont nuls et tels que la trace normale est nulle dans $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_1))'$ et la trace tangentielle nulle dans $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))'$:

$$\begin{array}{rcl} M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) & = & \left\{ \boldsymbol{\mu} \in (L^2(\Omega))^2, \ \operatorname{div} \boldsymbol{\mu} = 0 \ , \ \mathbf{rot} \ \boldsymbol{\mu} = 0 \ , \right. \\ & & \left. \gamma_n \boldsymbol{\mu} = 0 \text{ dans } (H_{00}^{1/2}(\Gamma_1))' \ , \ \gamma_t \boldsymbol{\mu} = 0 \text{ dans } (H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))' \right\}. \end{array}$$

Il est clair que

$$M^1(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2) \subset M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2). \tag{1.27}$$

Proposition 1.3.4 *Opérateur de projection.*
$M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ est un sous-espace fermé de $(L^2(\Omega))^2$ et on appelle $\Pi^0_{\Gamma_1\Gamma_2}$ la projection orthogonale de $(L^2(\Omega))^2$ sur $M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$.

preuve
Soit $(\boldsymbol{\mu}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $M^0(\Omega; \Gamma_1, \Gamma_2)$ convergeant vers une fonction $\boldsymbol{\mu}$ de $(L^2(\Omega))^2$. Alors les suites $(\operatorname{div} \boldsymbol{\mu}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{rot} \boldsymbol{\mu}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent au sens des distributions vers div $\boldsymbol{\mu}$ et rot $\boldsymbol{\mu}$ respectivement. Or, div $\boldsymbol{\mu}_k = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ et rot $\boldsymbol{\mu}_k = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ donc div $\boldsymbol{\mu} =$ rot $\boldsymbol{\mu} = 0$, donc $\boldsymbol{\mu}$ appartient à l'espace $H(\operatorname{div}, \Omega) \cap H(\operatorname{rot}, \Omega)$.

D'autre part, les traces normales et tangentielles de $(\boldsymbol{\mu}_k)$ sont respectivement définies dans $(H^{1/2}_{00}(\Gamma_1))'$ et dans $(H^{1/2}_{00}(\Gamma_2))'$ (proposition (1.1.3)), et y sont nulles (par l'hypothèse $\boldsymbol{\mu}_k \in M^0(\Omega;\Gamma_1,\Gamma_2)$). Les suites $(\gamma_n.\boldsymbol{\mu}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_t.\boldsymbol{\mu}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\gamma_n.\boldsymbol{\mu}$ et $\gamma_t.\boldsymbol{\mu}$ dans l'espace $H(\mathrm{div},\Omega)\cap H(\mathrm{rot},\Omega)$, on a donc $\gamma_n.\boldsymbol{\mu}=0$ dans $(H^{1/2}_{00}(\Gamma_1))'$ et $\gamma_t.\boldsymbol{\mu}=0$ dans $(H^{1/2}_{00}(\Gamma_2))'$ soit $\boldsymbol{\mu}$ appartient à l'espace $M^0(\Omega;\Gamma_1,\Gamma_2)$. Ce dernier est donc fermé dans $(L^2(\Omega))^2$ et l'opérateur de projection est bien défini. ■

Remarque 1.3.5 *sur les espaces M^0 et M^1.*
Dans le cas où la frontière du domaine est régulière, les espaces $M^0(\Omega;\emptyset,\Gamma)$ et $M^1(\Omega;\emptyset,\Gamma)$, ainsi que $M^0(\Omega;\Gamma,\emptyset)$ et $M^1(\Omega;\Gamma,\emptyset)$ sont confondus [ABDG98], [Ben84], [FT78].
On en connaît même les dimensions :

$$\textit{dim } M^0(\Omega;\emptyset,\Gamma) = \textit{ nombre de composantes connexes du bord} - 1.$$

$$\textit{dim } M^0(\Omega;\Gamma,\emptyset) = \textit{ nombre de trous dans le domaine.}$$

De plus, on sait que dans $\mathbb{R}^2$, dim $M^0(\Omega;\emptyset,\Gamma) =$ dim $M^0(\Omega;\Gamma,\emptyset)$ [CB68], ce qui n'est pas le cas en trois dimensions. Le point essentiel de la généralisation proposée par F. Dubois est la présence possible de singularités dues aux conditions limites mêlées sur la frontière.

Théorème 1.3.6 *Représentation générale de champs de vecteurs.*
Soit $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2$, alors il existe φ et ψ uniquement définis dans respectivement $H^1_0(\Omega;\Gamma_1)$ et $H^1_0(\Omega;\Gamma_2)$ tels que $\mathbf{u}$ se décompose **orthogonalement** *en :*

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \mathbf{rot}\ \psi + \Pi^0_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u}$$

avec φ et ψ dépendant continuement de $\mathbf{u}$:

$$\exists\, C>0\ ,\quad \|\varphi\|_{1,\Omega} \le C\,\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{\psi}\|_{1,\Omega} \le C\,\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}\ .$$

preuve

- Vérifions d'abord l'orthogonalité de la décomposition.

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi,\mathbf{rot}\ \psi) &= -(\varphi,\underbrace{\mathrm{div}\ \mathbf{rot}\ \psi}_{=0}) + <\gamma\varphi,\mathbf{rot}\ \psi.\mathbf{n}>_\Gamma \\ &= <\gamma\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{t}}>_\Gamma \\ &= 0\end{aligned}$$

car sur Γ_1 ; $\gamma\varphi = 0$ et sur Γ_2 ; $\dfrac{\partial\psi}{\partial\mathbf{t}} = 0$ car $\gamma\psi = 0$ sur Γ_2.
On peut remarquer que l'intégration par parties par rapport à l'autre variable donne le même résultat :

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi,\mathbf{rot}\ \psi) &= (\underbrace{\mathrm{rot}\ \nabla\varphi}_{=0},\psi) + <\nabla\varphi.\mathbf{t},\gamma\psi>_\Gamma \\ &= <\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{t}},\gamma\psi>_\Gamma \\ &= 0\end{aligned}$$

car sur Γ_2 ; $\gamma\psi = 0$ et sur Γ_1 ; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{t}} = 0$ car $\gamma\varphi = 0$ sur Γ_1.

Remarque 1.3.7 *En fait on a mieux : l'orthogonalité est vraie pour toute fonction ζ dans $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ et toute fonction η dans $H_0^1(\Omega;\Gamma_2)$.*

Soit $\overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u} \in M^0(\Omega;\Gamma_2,\Gamma_1)$ alors : div $\overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u} = 0$, rot $\overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u} = 0$,
$\gamma_n\overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u} = 0$ dans $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))'$, $\gamma_t\overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u} = 0$ dans $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_1))'$.
Et soit $\varphi \in H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ (la trace de φ appartient alors à l'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$)

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi, \overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u}) &= -(\varphi, \underbrace{\text{div } \overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u}}_{=0}) + < \gamma\varphi, \overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u}.\mathbf{n} >_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_2),(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))'} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Remarque 1.3.8 *Ici aussi l'orthogonalité est vraie pour toute fonction ζ dans $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ et toute fonction $\boldsymbol{\mu}$ dans $M^0(\Omega;\Gamma_2,\Gamma_1)$.*

De la même façon, pour $\psi \in H_0^1(\Omega;\Gamma_2)$, sa trace appartient à l'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$, donc :

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot}\ \psi, \overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u}) &= (\psi, \underbrace{\text{rot } \overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u}}_{=0}) + < \gamma\psi, \overset{0}{\Pi}_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u}.\mathbf{t} >_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1),(H_{00}^{1/2}(\Gamma_1))'} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Remarque 1.3.9 *Idem : l'orthogonalité est vraie pour toute fonction ζ dans $H_0^1(\Omega;\Gamma_2)$ et toute fonction $\boldsymbol{\mu}$ dans $M^0(\Omega;\Gamma_2,\Gamma_1)$.*

- Démontrons maintenant l'existence de la décomposition. Le champ $\mathbf{u}$ est donné dans $(L^2(\Omega))^2$. Compte-tenu des relations d'orthogonalité (remarques 1.3.7 - 1.3.8 - 1.3.9), φ est nécessairement la solution variationnelle dans $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll}(\nabla\varphi,\nabla\zeta) &=& (\mathbf{u},\nabla\zeta) & \forall\zeta\in H_0^1(\Omega,\Gamma_1)\\ \varphi &=& 0 & \text{sur } \Gamma_1.\end{array}\right. \tag{1.28}$$

Quelle que soit la mesure de Γ_1, il existe toujours une inégalité de Poincaré généralisée dans $H_0^1(\Omega,\Gamma_1)$, c'est-à-dire :

$$\exists\ C_{Pg} > 0 \ / \ \forall\zeta \in H_0^1(\Omega,\Gamma_1)\ ,\ \ \|\ \zeta\ \|_{1,\Omega} \leq C_{Pg}\ \|\ \nabla\zeta\ \|_{0,\Omega} \tag{1.29}$$

Le problème (1.28) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega,\Gamma_1)$ d'après le théorème de Lax-Milgram. En effet, $H_0^1(\Omega,\Gamma_1)$ est un espace de Hilbert (comme fermé de $H^1(\Omega)$), la forme linéaire

$$H_0^1(\Omega,\Gamma_1) \ni \zeta \longmapsto (\mathbf{u},\nabla\zeta) \in \mathbb{R}$$

est continue et la forme bilinéaire

$$H_0^1(\Omega,\Gamma_1)\times H_0^1(\Omega,\Gamma_1) \ni (\varphi,\zeta) \longmapsto (\nabla\varphi,\nabla\zeta) \in \mathbb{R}$$

est continue et elliptique sur $H^1_0(\Omega,\Gamma_1)$ (d'aprés l'inégalité de Poincaré généralisée). On a donc existence de φ dans $H^1_0(\Omega,\Gamma_1)$ avec l'inégalité suivante :

$$\exists\, C>0\ ,\quad \|\,\varphi\,\|_{1,\Omega} \leq C \,\|\,\mathbf{u}\,\|_{0,\Omega}\ .$$

Remarque 1.3.10 *Le problème continu que résout formellement φ est le suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\varphi & = & \mathrm{div}\ \mathbf{u} & \text{dans } \Omega \\ \varphi & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{array}\right. \tag{1.30}$$

De la même façon, $\psi\in H^1_0(\Omega;\Gamma_2)$ est nécessairement la solution variationnelle de :

$$\left\{\begin{array}{rcll} (\mathbf{rot}\ \psi,\mathbf{rot}\ \chi) & = & (\mathbf{u},\mathbf{rot}\ \chi) & \forall\chi\in H^1_0(\Omega,\Gamma_2) \\ \chi & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{array}\right. \tag{1.31}$$

L'existence et l'unicité de ψ dans $H^1_0(\Omega;\Gamma_2)$ sont encore une fois assurées par le théorème de Lax-Milgram (car il existe la même inégalité de Poincaré généralisée dans $H^1_0(\Omega;\Gamma_2)$, en dimension deux les formes bilinéaires $(\nabla.,\nabla.)$ et $(\mathbf{rot}\ .,\mathbf{rot}\ .)$ sont confondues). Et on obtient l'inégalité :

$$\exists\, C>0\ ,\quad \|\,\boldsymbol{\psi}\,\|_{1,\Omega} \leq C \,\|\,\mathbf{u}\,\|_{0,\Omega}\ .$$

Remarque 1.3.11 *Le problème continu que résout formellement ψ est le suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\psi & = & \mathrm{rot}\ \mathbf{u} & \text{dans } \Omega \\ \psi & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{1.32}$$

Il reste à caractériser le terme résiduel, soit

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} - \nabla\varphi - \mathbf{rot}\ \psi.$$

La fonction $\boldsymbol{\xi}$ appartient à $(L^2(\Omega))^2$ et il est clair que div $\boldsymbol{\xi}=0$, et que rot $\boldsymbol{\xi}=0$ (*cf* formules (1.30) et (1.32)).
Par les orthogonalités démontrées plus haut (1.3.7 - 1.3.8 - 1.3.9), on a aussi :

$$\begin{array}{rcll} (\boldsymbol{\xi},\nabla\ \zeta) & = & 0 & \forall\zeta\in H^1_0(\Omega;\Gamma_1) \\ (\boldsymbol{\xi},\mathbf{rot}\ \chi) & = & 0 & \forall\chi\in H^1_0(\Omega;\Gamma_2). \end{array}$$

Définissons η solution variationnelle dans $H^1_0(\Omega,\Gamma_1)$ du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\eta & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \eta & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \eta & = & g & \text{sur } \Gamma_2 \end{array}\right. \tag{1.33}$$

où g est un champ scalaire donné dans $H^{1/2}_{00}(\Gamma_2)$.
Alors :

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\xi},\eta) = -\underbrace{(\boldsymbol{\xi},\nabla\eta)}_{=0 \text{ car } \eta\in H^1_0(\Omega;\Gamma_1)} + <\boldsymbol{\xi}.\mathbf{n},g>_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma_2))',H^{1/2}_{00}(\Gamma_2)} = 0$$

soit $\boldsymbol{\xi}.\mathbf{n} = 0$ dans $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))'$. Définissons ensuite $\tilde{\eta}$ solution variationnelle dans $H_0^1(\Omega, \Gamma_2)$ de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\tilde{\eta} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\eta} & = & h & \text{sur } \Gamma_1 \\ \tilde{\eta} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \tag{1.34}$$

où h est un champ scalaire donné dans $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$.
Alors :

$$(\text{rot } \boldsymbol{\xi}, \tilde{\eta}) = \underbrace{(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{rot}\ \tilde{\eta})}_{=0 \text{ car } \tilde{\eta} \in H_0^1(\Omega;\Gamma_2)} + < \boldsymbol{\xi}.\mathbf{t}, h >_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_1))', H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)} = 0$$

soit $\boldsymbol{\xi}.\mathbf{t} = 0$ dans $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_1))'$. En conséquence, $\boldsymbol{\xi} = \Pi^0_{\Gamma_2\Gamma_1}\mathbf{u}$ et le théorème est établi.

■

1.4 Démonstration de l'existence d'une solution au problème de Stokes

Reprenons la formulation triple du problème de Stokes (1.7) introduite au paragraphe 1.1, on voit qu'elle n'est qu'une particularisation de la formulation abstraite (1.19). En effet, l'espace W n'est autre que l'espace $H^1(\Omega)$ avec conditions limites, l'espace X est l'espace $H(\text{div}, \Omega)$ avec conditions limites, Y est $L^2(\Omega)$ et Z, $(L^2(\Omega))^2$. De plus, la norme dans $W = H^1(\Omega)$ est plus grande que la norme dans $Y = L^2(\Omega)$, et celle dans $X = H(\text{div}, \Omega)$, plus grande que celle dans $Z = (L^2(\Omega))^2$. Les hypothèses (1.8) et (1.9) sont bien vérifiées.
Quant aux fonctions R et D elles sont définies par :

$$\begin{array}{rcl} R : W & \longrightarrow & Z \\ \varphi & \longrightarrow & -\mathbf{rot}\ \varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D : X & \longrightarrow & Y \\ \mathbf{v} & \longrightarrow & \text{div } \mathbf{v}. \end{array}$$

La dernière hypothèse (1.18) est elle aussi évidente dans le cadre où l'on s'est placé (bidimensionnel). En effet, si $\varphi \in W \cap \text{Ker}R$, $\mathbf{rot}\ \varphi = 0$ et $\| \varphi \|_W = \| \varphi \|_{0,\Omega} = \| \varphi \|_Y$.

<u>Hypothèses supplémentaires pour l'existence [Dub99]</u> :

La démonstration de l'existence d'une solution au problème (1.7) fait intervenir l'hypothèse suivante : on suppose n'avoir qu'une seule partition de la frontière c'est-à-dire :

$$\Gamma_n = \Gamma_\omega \text{ et } \Gamma_p = \Gamma_t, \text{ avec } \Gamma_n \cap \Gamma_p = \emptyset\ ,\ \overline{\Gamma}_n \cup \overline{\Gamma}_p = \Gamma.$$

De plus, on suppose que :

$$M^0(\Omega; \Gamma_n, \Gamma_p) = \{0\}\,. \tag{1.35}$$

Ces deux hypothèses permettent la démonstration du premier point de la section « Formulation abstraite » (1.15) à savoir :

$$(\text{Ker}D)^\sqcup \subset (\text{Im}R)^\sqcup$$

En fait on va démontrer la

Proposition 1.4.1

$$\mathrm{Ker}D = \mathrm{Im}R$$

ce qui impliquera forcément l'hypothèse (1.15).

preuve

Soit $\mathbf{z} = \mathbf{rot}\ \varphi$ avec $\varphi \in W$, $\gamma\varphi = 0$ sur $\Gamma_\omega = \Gamma_n$. Comme div $\mathbf{z} = 0$, $\mathbf{z}$ appartient bien à $H(\mathrm{div}, \Omega)$ et $\gamma_n \mathbf{rot}\ \varphi = \mathbf{rot}\ \varphi.\mathbf{n} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{t}} = 0$ sur $\Gamma_\omega = \Gamma_n$ donc $\mathbf{z}$ appartient à $X \cap \mathrm{Ker}D$ et l'inclusion dans un sens $\mathrm{Im}R \subset \mathrm{Ker}D$ est démontrée. Pour montrer l'inclusion inverse, il faut utiliser le théorème de représentation des champs de vecteurs (1.3.6). Soit $\mathbf{v} \in X \cap \mathrm{Ker}D$, d'après le théorème (1.3.6), $\mathbf{v}$ se décompose comme suit :

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \mathbf{rot}\ \psi + \overset{0}{\Pi}_{\Gamma_n\Gamma_p} \mathbf{v}$$

avec $\varphi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_p)$ et $\psi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_n)$. L'hypothèse (1.35) permet d'éliminer la partie résiduelle $\overset{0}{\Pi}_{\Gamma_n\Gamma_p} \mathbf{v} = 0$. Il reste $\mathbf{v} = \nabla\varphi + \mathbf{rot}\ \psi$. Mais φ est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\nabla\varphi, \nabla\zeta) & = & (\mathbf{v}, \nabla\zeta) \quad \forall\zeta \in H_0^1(\Omega, \Gamma_p) \\ \varphi & = & 0 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_p. \end{array} \right. \tag{1.36}$$

Or $(\mathbf{v}, \nabla\zeta) = -\underbrace{(\mathrm{div}\ \mathbf{v}, \zeta)}_{=0} + < \mathbf{v}.\mathbf{n}, \zeta >_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma n))', H_{00}^{1/2}(\Gamma n)} = 0$. Donc le second membre de (1.36) est nul ce qui implique $\varphi = 0$. Et $\mathbf{v}$ s'écrit simplement $\mathbf{rot}\ \psi$ avec $\psi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_n)$. On a donc démontré que $\mathrm{Ker}D \subset \mathrm{Im}R$ soit avec l'autre inclusion $\mathrm{Ker}D = \mathrm{Im}R$. ■

Les hypothèses qui restent à vérifier sont les hypothèses (1.16) et (1.17) c'est-à-dire les conditions inf-sup. Le paragraphe suivant est consacré à la démonstration de ces conditions dans le cadre le plus général de conditions limites (dans la mesure du possible, la condition (1.17) étant plus délicate) et non pas seulement dans le cas précisé ici.

1.5 Démonstration des conditions inf-sup continues

A partir de maintenant et pour simplifier les écritures, le coefficient de viscosité ν est choisi égal à 1. On précisera néanmoins si les constantes introduites en dépendent.

Condition inf-sup pression-vitesse (1.16)

On suppose que les conditions limites sont les plus générales possibles mais homogènes. C'est-à-dire : la vitesse normale est imposée à zéro sur une partie Γ_n de Γ (et donc on a une « condition de Neumann » pour la pression sur la partie complémentaire Γ_p, la pression est dans $L^2(\Omega)$). Quant au tourbillon, il est imposé à zéro sur une partie Γ_ω de Γ. L'espace X est constitué des fonctions de $H(\mathrm{div}, \Omega)$, qui ont une trace normale nulle sur Γ_n et Y des fonctions de $L^2(\Omega)$. On veut donc démontrer que :

$$\exists a > 0 \quad \inf_{\substack{q\in Y\\ q\neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v}\in X\\ \mathbf{v}\neq 0}} \frac{(\mathrm{div}\ \mathbf{v}, q)}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X \quad \|\ q\ \|_Y} \geq a.$$

Soit $q \in Y$ et ψ solution du problème variationnel suivant :

$$-(\nabla\psi, \nabla\varphi) = (q, \varphi) \quad \forall\varphi \in \left\{ H^1(\Omega)\ ;\ \varphi|_{\Gamma_p} = 0 \right\} = H_0^1(\Omega; \Gamma_p),$$

qui vérifie

$$\|\psi\|_{1,\Omega} \leq C\|q\|_{0,\Omega}.$$

Remarque 1.5.1 *Dans le cas particulier où la mesure de Γ_p est vide, le problème variationnel précédent est un problème de Laplace avec condition limite de Neumann sur $\Gamma_n = \Gamma$. La condition de compatibilité nécessaire à l'existence d'une solution est effectivement vérifiée car la pression est alors cherchée dans $L^2_0(\Omega)$.*

On pose $\widetilde{\mathbf{v}} = \nabla\psi$, $\widetilde{\mathbf{v}} \in L^2(\Omega)$ et on peut écrire, au sens des distributions :

$$\begin{array}{rcll} < \text{div } \widetilde{\mathbf{v}}, \chi >_{\mathcal{D}'\ \mathcal{D}} & = & - < \widetilde{\mathbf{v}}, \nabla\chi >_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} & \forall\chi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ & = & -(\nabla\psi, \nabla\chi) & \forall\chi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ & = & (q, \chi) & \forall\chi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ | < \text{div } \widetilde{\mathbf{v}}, \chi > | & \leq & \|q\|_{0,\Omega}\ \|\chi\|_{0,\Omega}. & \end{array}$$

On a démontré div $\widetilde{\mathbf{v}} = q$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et comme q appartient à $L^2(\Omega)$, div $\widetilde{\mathbf{v}}$ appartient aussi à $L^2(\Omega)$. Soit

$$\left.\begin{array}{rl} \widetilde{\mathbf{v}} & \in L^2(\Omega) \\ \text{div } \widetilde{\mathbf{v}} = \Delta\psi = q & \in L^2(\Omega) \end{array}\right\} \widetilde{\mathbf{v}} \in H(\text{div}, \Omega).$$

Comme $\nabla\psi = \widetilde{\mathbf{v}}$ est dans $H(\text{div}, \Omega)$, sa trace normale est bien définie et on a $\widetilde{\mathbf{v}}.\mathbf{n}_{|\Gamma_n} = \dfrac{\partial\psi}{\partial n}|_{\Gamma_n} = 0$, soit $\widetilde{\mathbf{v}} \in X$. Enfin,

$$\begin{array}{rcl} \| \widetilde{\mathbf{v}} \|^2_X & = & \| \widetilde{\mathbf{v}} \|^2_{0,\Omega} + \| \text{div } \widetilde{\mathbf{v}} \|^2_{0,\Omega} \\ & = & \| \nabla\psi \|^2_{0,\Omega} + \| q \|^2_{0,\Omega} \\ & \leq & (1 + C^2) \| q \|^2_{0,\Omega} = (1 + C^2) \| q \|^2_Y . \end{array}$$

On a donc démontré que

$$\exists\, C > 0\ ,\ \forall q \in Y\ ,\ \ \exists\, \widetilde{\mathbf{v}} \in X \ /\ \text{div } \widetilde{\mathbf{v}} = q \text{ et } \ \| \widetilde{\mathbf{v}} \|_X \leq \sqrt{1 + C^2}\ \| q \|_Y$$

d'où

$$\forall q \in Y \quad \sup_{\mathbf{v}\in X} \frac{(\text{div } \mathbf{v}, q)}{\| \mathbf{v} \|_X} \geq \frac{\| q \|^2_Y}{\| \widetilde{\mathbf{v}} \|_X} \geq \frac{1}{\sqrt{(1 + C^2)}} \| q \|_Y .$$

La première condition inf-sup est donc toujours vérifiée avec $a = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + C^2)}}$.

Condition inf-sup vitesse-tourbillon (1.17)

Il faut démontrer que :

$$\exists\, b > 0\ ,\ \inf_{\substack{\mathbf{v}\in \mathrm{Ker}\, D \\ \mathbf{v}\neq 0}} \sup_{\substack{\varphi\in W \\ \varphi\neq 0}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \mathbf{v} \|_X \| \varphi \|_W} \geq b.$$

Proposition 1.5.2 *Caractérisation du noyau de D.*
Soit $V = \{\mathbf{v} \in X\ ;\ (q, \text{div } \mathbf{v}) = 0 \quad \forall q \in Y\}$. Alors $V = \mathrm{Ker}\ D$.

preuve
L'inclusion Ker $D \subset V$ est évidente. Soit maintenant $\mathbf{v} \in X = H(\text{div}, \Omega)$ un élément de V, sa divergence div $\mathbf{v}$ est toujours dans $L^2(\Omega)$ mais il faut néanmoins distinguer le cas où $\text{mes}(\Gamma_p) = \emptyset$. Dans le cas $\text{mes}(\Gamma_p) = \emptyset$, $Y = L_0^2(\Omega)$ et $\Gamma_n = \Gamma_p^c = \Gamma$. Les éléments de X vérifient donc $\mathbf{v.n} = 0$ sur Γ. Ce qui implique

$$\int_\Omega \text{div } \mathbf{v} = \int_\Gamma \mathbf{v.n} = 0$$

et donc div $\mathbf{v}$ appartient bien à $L_0^2(\Omega) = Y$.
Deuxième cas : $\text{mes}(\Gamma_p) \neq \emptyset$, alors $Y = L^2(\Omega)$ et div $\mathbf{v} \in Y$. Dans les deux cas div $\mathbf{v}$ appartient à Y et on peut prendre $q = \text{div } \mathbf{v}$ dans la définition de V :
$(\text{div } \mathbf{v}, \text{div } \mathbf{v}) = \| \text{div } \mathbf{v} \|_{0,\Omega}^2 = 0 \Longrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0$, soit $\mathbf{v} \in \text{Ker } D$. ∎
Cette condition inf-sup pourra donc être invariablement notée :

$$\exists\, b > 0 \ , \quad \inf_{\mathbf{v} \in \text{Ker } D} \sup_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \mathbf{v} \|_X \| \varphi \|_W} \geq b.$$

ou

$$\exists\, b > 0 \ , \quad \inf_{\mathbf{v} \in V} \sup_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \mathbf{v} \|_X \| \varphi \|_W} \geq b.$$

La démonstration de cette condition se fait sous les deux hypothèses déjà rencontrées qui sont :

$$M^0(\Omega; \Gamma_n, \Gamma_p) = \{0\}$$

et

$$\Gamma_n = \Gamma_\omega.$$

Preuve de (1.17)
Soit $\mathbf{v} \in X \cap \text{Ker } D$. D'après le théorème (1.3.6), comme Ker $D \equiv$ Im R, $\mathbf{v}$ s'écrit

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}\ \psi \text{ avec } \psi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_n)$$

et $\| \psi \|_{1,\Omega} \leq C \| \mathbf{v} \|_{0,\Omega} = C \| \mathbf{v} \|_X$.
Il faut maintenant minorer $\sup\limits_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \dfrac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \varphi \|_{1,\Omega}}$.
Or, si on suppose que $\Gamma_n = \Gamma_\omega$, on peut choisir pour φ, la fonction ψ, car $\psi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_n) = H_0^1(\Omega; \Gamma_\omega) = W$ et on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\varphi \in W \\ \varphi \neq 0}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \varphi \|_{1,\Omega}} &\geq \frac{(\mathbf{rot}\ \psi, \mathbf{rot}\ \psi)}{\| \psi \|_{1,\Omega}} \\
&\geq \frac{\| \mathbf{rot}\ \psi \|_{0,\Omega}^2}{\| \psi \|_{1,\Omega}} \\
&\geq \frac{\| \mathbf{v} \|_{0,\Omega}^2}{\| \psi \|_{1,\Omega}} \\
&\geq \frac{1}{C} \| \mathbf{v} \|_{0,\Omega} = \frac{1}{C} \| \mathbf{v} \|_X \ .
\end{aligned}$$

Donc la condition (1.17) est vérifiée avec $b = \dfrac{1}{C}$. ■

Remarque 1.5.3 *La constante précédente dépend de la viscosité lorsque celle-ci est différente de* 1.

En conclusion, les quatre hypothèses du théorème abstrait présenté au paragraphe 2 sont vérifiées dans le cas où :

$$\Gamma = \Gamma_n \cup \Gamma_p \text{ avec } \Gamma_n = \Gamma_\omega \text{ et } \Gamma_p = \Gamma_t$$

et

$$M^0(\Omega; \Gamma_n, \Gamma_p) = \{0\}\,.$$

On a donc alors l'existence d'une solution $(\omega, \mathbf{u}, p)$ dans $W \times X \times Y$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega, \varphi) - (\mathbf{u}, \mathbf{rot}\ \varphi) & = & <\tau_0, \varphi>_\Gamma & \forall\ \varphi \in\ W \\ \nu\ (\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\ \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - <\Pi_0, \mathbf{v}.\mathbf{n}>_\Gamma & \forall\ \mathbf{v} \in\ X \\ (\operatorname{div}\ \mathbf{u}, q) & = & 0 & \forall\ q \in\ Y \end{array}\right.$$

avec l'inégalité de continuité par rapport aux données suivante

$$\exists\ C > 0\ ,\ \forall \sigma = (\Pi_0, \tau_0, \mathbf{f}) \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_p) \times (H^{1/2}_{00}(\Gamma_t))' \times (L^2(\Omega))^2\ ,$$

$$\| \omega(\sigma) \|_W + \| \mathbf{u}(\sigma) \|_X + \| p(\sigma) \|_Y \leq C \| \sigma \|_{H'} = \| \Pi_0 \|_{1/2,\Gamma_p} + \| \tau_0 \|_{(1/2,\Gamma_t)'} + \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega}$$

où

$$\| \tau_0 \|_{(1/2,\Gamma_t)'} = \sup_{\eta \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_t)} \frac{<\tau_0, \eta>}{\| \eta \|_{1/2,\Gamma_t}}.$$

Chapitre 2

Problème discret et premiers résultats numériques

2.1 Le problème discret

Dans tout ce chapitre on suppose que le domaine Ω est convexe. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation supposée régulière du domaine Ω. On note $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des sommets des éléments de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des arêtes des éléments de $\mathcal{T}$.

On cherche $(\omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \in W_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{T}} \times Y_{\mathcal{T}}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & < \tau_0, \varphi_{\mathcal{T}} > & \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \nu(\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (p_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - < \Pi_0, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n} > & \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) & = & 0 & \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \end{array}\right. \quad (2.1)$$

où

$$W_{\mathcal{T}} = \left\{\omega_{\mathcal{T}} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\ ;\ \omega_{\mathcal{T}|_K} \in \mathbb{P}^1(K) \quad \forall\ K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\ ,\ \omega_{\mathcal{T}}|_{\Gamma_\omega} = 0\ \right\}$$

$$X_{\mathcal{T}} = \left\{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in H(\mathrm{div}, \Omega)\ ;\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_K = \begin{pmatrix} a_K \\ b_K \end{pmatrix} + c_K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \forall\ K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\ ;\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n\right\}$$

$$Y_{\mathcal{T}} = \left\{q_{\mathcal{T}} \in L^2_{(0)}(\Omega)\ ;\ q_{\mathcal{T}|_K} \in \mathbb{P}^0(K) \quad \forall\ K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\right\}$$

De plus, on notera $V_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}\ /\ (q_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = 0\ \ \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}\}$.

Remarque 2.1.1 • *Conformément à la remarque (1.1.1) du chapitre* 1, *on a laissé le terme en* div $\mathbf{u}$ *dans la formulation discrète. En effet, l'expérience numérique montre que le système linéaire est mieux conditionné lorsque ce terme est rajouté.*

• *Les espaces d'approximation choisis ici sont tous des espaces conformes. L'élément choisi pour l'espace* $H(\mathrm{div})$ *est l'élément fini de Raviart-Thomas de degré 1 (qui est conforme* $H(\mathrm{div})$*) [RT77].*

Les degrés de liberté sont donc les suivants :

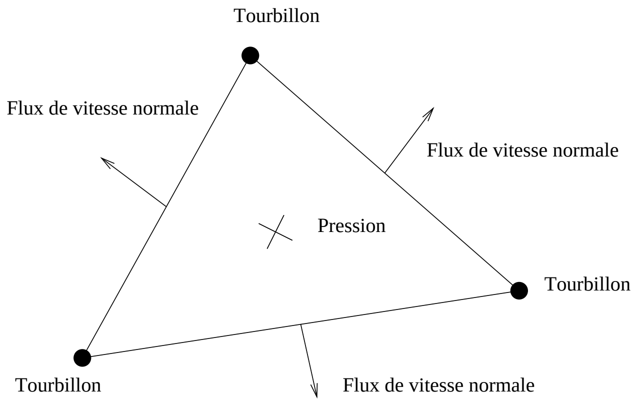


Fig. 2.1 – *Degrés de liberté pour la formulation* $(\omega, \mathbf{u}, p)$.

Proposition 2.1.2 *Caractérisation de l'espace* $V_{\mathcal{T}}$.

$$V_{\mathcal{T}} = \mathrm{Ker} D.$$

preuve
L'inclusion $\mathrm{Ker}D \subset V_{\mathcal{T}}$ est évidente. Soit maintenant $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$; sa divergence qui vaut :

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_K = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = \partial_1(a_K + c_K x_1) + \partial_2(b_K + c_K x_2) = 2c_K$$

est constante par triangle. De plus, on a démontré dans la proposition (1.5.2), que dans le cas où $Y = L_0^2(\Omega)$, div $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ appartient bien à l'espace $L_0^2(\Omega)$. Donc si $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$, div $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}$ et on peut prendre $q_{\mathcal{T}} = \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ dans la définition de $V_{\mathcal{T}}$. Il vient donc :

$$(\mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \| \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 = 0$$

soit $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathrm{Ker}D$. ■

Remarque 2.1.3 *On a donc le même résultat que dans le continu.*

Proposition 2.1.4 *Existence et unicité d'une solution au problème discret.*
Le problème discret (2.1) admet une unique solution dans $W_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{T}} \times Y_{\mathcal{T}}$ *qui dépend continuement des données si les conditions inf-sup discrètes suivantes sont vérifiées :*

(i)

$$\exists\, a > 0\ ,\quad \inf_{\substack{q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \\ q_{\mathcal{T}} \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \neq 0}} \frac{(\mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}})}{\| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X \| q_{\mathcal{T}} \|_Y} \geq a, \tag{2.2}$$

(ii)

$$\exists\, b > 0\ ,\quad \inf_{\substack{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ \varphi_{\mathcal{T}} \neq 0}} \frac{(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}})}{\| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X \| \varphi_{\mathcal{T}} \|_W} \geq b. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1.5 *La proposition (2.1.2) nous permet d'écrire la condition (2.3) sous les deux formes équivalentes :*

$$\inf_{\substack{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ \varphi_{\mathcal{T}} \neq 0}} \frac{(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}})}{\| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X \| \varphi_{\mathcal{T}} \|_W} \geq b.$$

$$\inf_{\substack{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathrm{Ker} D \\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ \varphi_{\mathcal{T}} \neq 0}} \frac{(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}})}{\| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X \| \varphi_{\mathcal{T}} \|_W} \geq b.$$

preuve :
Comme ce système est carré, pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution il suffit de démontrer l'injectivité de l'application linéaire, donc de montrer que si le second membre est nul la solution $(\omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}})$ de (2.1) ne peut être que nulle. Pour cela, on choisit dans (2.1) $\varphi_{\mathcal{T}} = \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}} = p_{\mathcal{T}}$ et on somme les trois équations, on obtient

$$(\omega_{\mathcal{T}}, \omega_{\mathcal{T}}) + \nu\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = 0 \text{ soit } \| \omega_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 + \nu\ \| \mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 = 0$$

ce qui implique que $\omega_{\mathcal{T}} = 0$ et div $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0$ puisque $\nu > 0$. Si $\omega_{\mathcal{T}} = 0$ et div $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0$, la deuxième équation de (2.1) devient :

$$(p_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = 0 \quad \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$$

et par la condition inf-sup discrète (2.2), on obtient $p_{\mathcal{T}} = 0$. Il reste donc l'équation

$$(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) \quad = \quad 0 \quad \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}$$

qui grâce à la condition (2.3) (car $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathrm{Ker} D$) nous permet de conclure que $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0$. On a bien démontré que l'application linéaire représentée par (2.1) est injective et comme la dimension des espaces est finie, qu'elle est bijective. ∎

Remarque 2.1.6 *Si l'on n'avait pas gardé le terme en* div $\mathbf{u}$, *on aurait obtenu par la première équation*

$$(\omega_{\mathcal{T}}, \omega_{\mathcal{T}}) = 0 \Longrightarrow \omega_{\mathcal{T}} = 0,$$

puis les deux équations

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) &= 0 \quad \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) &= 0 \quad \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

qui grâce à la condition (2.3) car $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ *permettent de conclure que* $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0$. *Finalement* div $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0$ *est obtenu en fin de raisonnement.*

Condition inf-sup discrète pression-vitesse (2.2)

Pour démontrer cette condition, on a besoin des résultats d'interpolation suivants.

Définition 2.1.7 *Opérateur d'interpolation dans* $H(\mathrm{div}, \Omega)$ *[RT77].*
On définit l'opérateur :

$$\Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} : H(\mathrm{div}, \Omega) \cap (H^1(\Omega))^2 \ni \mathbf{v} \longmapsto \Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}$$

de la manière suivante :

$$\forall \mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega),\ \forall a \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \int_a \Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v}.\mathbf{n}\, \mathrm{d}\gamma = \int_a \mathbf{v}.\mathbf{n}\, \mathrm{d}\gamma.$$

Proposition 2.1.8

$$\forall \mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega) \cap (H^1(\Omega))^2,\ \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\ ,\quad \int_K \mathrm{div}(\Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v} - \mathbf{v})\, \mathrm{d}x = 0.$$

preuve
Il suffit d'utiliser la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} \int_K \mathrm{div}(\Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v} - \mathbf{v})\, \mathrm{d}x &= \int_{\partial K} (\Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v} - \mathbf{v}).\mathbf{n}\, \mathrm{d}\gamma \\ &= 0 \ \text{ par définition de l'interpolée.} \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.9 *Pour toute fonction* $\mathbf{v}$ *dans* $H(\mathrm{div}, \Omega) \cap (H^1(\Omega))^2$*, on a les majorations suivantes ([Tho77] ou [Tho80]) :*

$$\| \Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v} \|_{0,\Omega} \leq C h_{\mathcal{T}} \ \| \mathbf{v} \|_{1,\Omega}$$
$$\| \mathrm{div}\ \Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v} \|_{0,\Omega} \leq C_1 \ \| \mathrm{div}\ \mathbf{v} \|_{0,\Omega}$$

ce qui revient à dire pour h *assez petit :*

$$\| \Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v} \|_X \leq C_2 \| \mathbf{v} \|_{1,\Omega}\ .$$

On reprend la démonstration faite dans le continu de la condition inf-sup pression-vitesse. Soit ψ la solution variationnelle du problème suivant :

$$-(\nabla\psi, \nabla\varphi) = (q_{\mathcal{T}}, \varphi) \quad \forall \varphi \in \left\{ H^1(\Omega)\ ;\ \varphi|_{\Gamma_p} = 0 \right\} = H_0^1(\Omega; \Gamma_p).$$

On suppose que ψ appartient à l'espace $H^2(\Omega)$.

Remarque 2.1.10 *Formellement,* ψ *résout le problème suivant pour l'opérateur de Laplace :*

$$\begin{cases} \Delta\psi &= q_{\mathcal{T}} \\ \psi &= 0 \quad \textit{sur } \Gamma_p \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n} &= 0 \quad \textit{sur } \Gamma_n. \end{cases}$$

Si Γ_p *est de mesure non nulle, on a un problème avec conditions limites mêlées, dont la solution* ψ *n'est dans* $H^2(\Omega)$ *que si le domaine est un rectangle et que la frontière commune entre* Γ_n *et* Γ_p *se trouve sur un ou plusieurs angles du rectangle [Gri85]. Si mes* $\Gamma_p = \emptyset$*,* ψ *est solution d'un problème de Neumann homogène dont la solution est dans* $H^2(\Omega)$ *(*Ω *est supposé convexe).*

Alors $\mathbf{v_0} = \nabla\psi$ appartient à $H(\mathrm{div}, \Omega) \cap (H^1(\Omega))^2$, on peut donc définir $\mathbf{w_0} = \Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v_0}$ et on a :

$$\begin{aligned} \| \Pi_{\mathcal{T}}^{\mathrm{div}} \mathbf{v_0} \|_{0,\Omega} &\leq C h_{\mathcal{T}} \| \mathbf{v_0} \|_{1,\Omega} & (2.4) \\ &\leq C h_{\mathcal{T}} \| q_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}\ . & (2.5) \end{aligned}$$

De plus par définition de l'interpolée, on a :

$$\forall\ K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\ ,\ \forall\ r \in Y_{\mathcal{T}}\ ,\quad \int_K r\, \mathrm{div}\ \mathbf{w_0}\, \mathrm{d}x = \int_K r\, \mathrm{div}\ \mathbf{v_0}\, \mathrm{d}x, \qquad (2.6)$$

et donc, en prenant $r_{|K} = \text{div } \mathbf{w_0}_{|K}$, on a :

$$\| \text{div } \mathbf{w_0} \|_{0,\Omega} \quad \leq \quad \| \text{div } \mathbf{v_0} \|_{0,\Omega} \; . \tag{2.7}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{w_0} \|^2_{\text{div},\Omega} &= \| \mathbf{w_0} \|^2_{0,\Omega} + \| \text{div } \mathbf{w_0} \|^2_{0,\Omega} = \| \Pi^{\text{div}}_{\mathcal{T}} \mathbf{v_0} \|^2_{0,\Omega} + \| \text{div } \mathbf{w_0} \|^2_{0,\Omega} \\
&\leq Ch_{\mathcal{T}} \| q_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \text{div } \mathbf{w_0} \|^2_{0,\Omega} \quad \text{par (2.4)} \\
&\leq Ch_{\mathcal{T}} \| q_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \text{div } \mathbf{v_0} \|^2_{0,\Omega} \quad \text{à l'aide de (2.7)} \\
&\leq Ch_{\mathcal{T}} \| q_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| q \|^2_{0,\Omega} \\
&\leq C \| q_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} \; .
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la condition inf-sup discrète car :

$$\begin{aligned}
\forall q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \quad \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}} \frac{(\text{div } \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}})}{\| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X} &\geq \frac{(\text{div } \mathbf{w_0}, q_{\mathcal{T}})}{\| \mathbf{w_0} \|_X} \\
&\geq \frac{(\text{div } \mathbf{v_0}, q_{\mathcal{T}})}{\| \mathbf{w_0} \|_X} \text{ par définition de l'interpolée (2.6)} \\
&\geq \frac{\| q_{\mathcal{T}} \|^2_Y}{\| \mathbf{w_0} \|_X} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{(1+C^2)}} \| q_{\mathcal{T}} \|_Y \; .
\end{aligned}$$

Condition inf-sup discrète vitesse-tourbillon (2.3)

Il faut démontrer que

$$\exists b > 0 \qquad \inf_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \cap \text{Ker} D} \quad \sup_{\varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}})}{\| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X \quad \| \varphi_{\mathcal{T}} \|_W} \geq b.$$

On va dans cette partie travailler avec l'hypothèse $\boxed{\Gamma_\omega \subset \Gamma_n.}$
Soit $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ à divergence nulle dans l'espace d'approximation de $H(\text{div})$ *i.e*

$$\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in (L^2(\Omega))^2 \; ; \; \text{div } \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0 \; ;$$

$$\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_K \;\; = \begin{pmatrix} a_K \\ b_K \end{pmatrix} + c_K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \; ; \; \mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n}|_{\Gamma_n} = 0.$$

On a div $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0$ dans chaque triangle, qui impose que $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_K$ est de la forme $\begin{pmatrix} a_K \\ b_K \end{pmatrix}$, et peut donc s'écrire comme le rotationnel d'un élément $\mathbb{P}^1$ par triangle, $\mathbf{v}_{\mathcal{T}|K} = \mathbf{rot}\ \varphi_{0|K}$, $\varphi_0 \in W_{\mathcal{T}}$, $K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$.
On a donc $\begin{pmatrix} a_K \\ b_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \varphi_0 \\ -\partial_1 \varphi_0 \end{pmatrix}$ sur chaque triangle.
De ces deux équations, on tire $\varphi_0(x_1, x_2) = a_K(x_2 - x_{2g}) + f(x_1) = -b_K(x_1 - x_{1g}) + g(x_2)$, où x_{1g} est l'abscisse du barycentre du triangle K et x_{2g} son ordonnée.
En $x_1 = x_{1g}$, on obtient $g(x_2) = a_K(x_2 - x_{2g}) + f(x_{1g})$.

En $x_2 = x_{2g}$, on obtient $f(x_1) = -b_K(x_1 - x_{1g}) + g(x_{2g})$.
En $x_1 = x_{1g}$ et $x_2 = x_{2g}$, on obtient $f(x_{1g}) = g(x_{2g}) = C$ *i.e* $\varphi_0(x_1, x_2) = a_K(x_2 - x_{2g}) - b_K(x_1 - x_{1g}) + C$, φ_0 ainsi défini est bien un polynôme de degré un sur chaque triangle.
Il reste à vérifier que φ_0 est continu sur le domaine pour qu'il appartienne bien à l'espace $W_{\mathcal{T}}$. Pour cela, on voit que l'on pourrait aussi construire φ_0, fonction d'une abscisse curviligne s en partant d'un sommet quelconque a_1 du maillage et poser

$$\varphi_0(a_2) = \varphi_0(a_1) + \int_{a_1 a_2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial s}\, \mathrm{d}s$$

or $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial s} = \partial_1 \varphi_0.\mathbf{t_1} + \partial_2 \varphi_0.\mathbf{t_2} = \partial_2 \varphi_0.\mathbf{n_1} - \partial_1 \varphi_0.\mathbf{n_2} = \mathbf{rot}\ \varphi_0.\mathbf{n} = \mathbf{v}.\mathbf{n}$ soit

$$\varphi_0(a_2) = \varphi_0(a_1) + \int_{a_1 a_2} \mathbf{v}.\mathbf{n}\, \mathrm{d}s$$

Comme $\mathbf{v}$ est à divergence nulle, l'intégrale $\displaystyle\int_{a_1 a_2} \mathbf{v}.\mathbf{n}\, \mathrm{d}s$ utilisée plus haut est indépendante du chemin choisi (Ω étant convexe, il est simplement connexe), et la valeur de φ_0 aux différents sommets du maillage est fixé, ce qui assure la continuité du polynôme de degré 1.
Finalement pour toute fonction $\mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}$ à divergence nulle, on a trouvé une fonction φ_0 qui appartient à l'espace $W_{\mathcal{T}}$ telle que $\mathbf{v}|_K = \mathbf{rot}\ \varphi_0|_K \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$. Enfin, comme $\mathbf{v}.\mathbf{n} = 0$ sur $\Gamma_n \supset \Gamma_\omega$, φ_0 est constante sur la partie Γ_ω du bord. Donc que l'on cherche φ_0 dans $W_{\mathcal{T}}$ avec $\mathrm{mes}(\Gamma_\omega) \neq \emptyset$ ou $\mathrm{mes}(\Gamma_\omega) = \emptyset$ (φ_0 est alors défini à une constante près soit dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$), la semi-norme H^1 est toujours équivalente à la norme H^1.
<u>N.B</u>: L'hypothèse $\Gamma_\omega = \Gamma_n$ rencontrée dans la condition continue est beaucoup plus forte que l'hypothèse (2.1) pour la condition discrète. En particulier, la condition inf-sup discrète est vérifiée dans les cas tests numériques qui vont être présentés puisqu'ils correspondent tous au cas où $\mathrm{mes}(\Gamma_\omega) = \emptyset$.
Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}})}{\| \varphi_{\mathcal{T}} \|_{1,\Omega}} &\geq \frac{(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_0)}{\| \varphi_0 \|_{1,\Omega}} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \mathbf{rot}\ \varphi_0 \,\mathrm{d}x}{\| \varphi_0 \|_{1,\Omega}} \\
&\geq \frac{\displaystyle\sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \int_K \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_K \mathbf{rot}\ \varphi_0|_K \,\mathrm{d}x}{\| \varphi_0 \|_{1,\Omega}} \\
&\geq \frac{\displaystyle\sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \int_K \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_K . \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_K \,\mathrm{d}x}{\| \varphi_0 \|_{1,\Omega}} \\
&\geq \frac{\| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2}{C |\varphi_0|_{1,\Omega}} \geq \frac{1}{C} \| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} = \frac{1}{C} \| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

2.2 Mise en oeuvre

Le développement informatique a été réalisé en partie pendant le stage de DEA ([Sal96]). Mais des améliorations ont été apportées, en particulier dans la résolution du système linéaire.

Il faut résoudre un système linéaire de la forme :

$$
\begin{aligned}
M\omega_{\mathcal{T}} - A^t \mathbf{u}_{\mathcal{T}} &= \mathbf{F_1} && (2.8)\\
A\omega_{\mathcal{T}} - B^t p_{\mathcal{T}} &= \mathbf{F_2} && (2.9)\\
B\mathbf{u}_{\mathcal{T}} &= \mathbf{F_3} && (2.10)
\end{aligned}
$$

où $(\omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}})$ sont respectivement à chercher dans les espaces suivants :

$$W_{\mathcal{T}} = \left\{\omega_{\mathcal{T}} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\ ;\ \omega_{\mathcal{T}}\,|_K \ \in \mathbb{P}^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\ ;\ \omega_{\mathcal{T}} = 0 \text{ sur } \Gamma_\omega\right\}$$

$$X_{\mathcal{T}} = \left\{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in H(\mathrm{div}, \Omega)\ ;\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\,|_K \ = \begin{pmatrix} a_K \\ b_K \end{pmatrix} + c_K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\ ;\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n\right\}$$

$$Y_{\mathcal{T}} = \left\{q_{\mathcal{T}} \in L^2_{(0)}(\Omega)\ ;\ q_{\mathcal{T}}\,|_K \ \in \mathbb{P}^0(K) \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\right\}$$

et où le second membre contient les termes de bord.

- les fonctions de base de $W_{\mathcal{T}}$ sont les coordonnées barycentriques notées λ_i où $i = 1, 2, 3$ est le numéro du sommet dans le triangle.

$$\lambda_i(A_j) = \delta_{ij}$$

- les fonctions de base de $X_{\mathcal{T}}$ sont données localement par la formule suivante :

$$\boldsymbol{\chi_i}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\mathrm{mes}K} \begin{pmatrix} x_1 - a_1^i \\ x_2 - a_2^i \end{pmatrix}$$

  où i est le numéro de l'arête dans le triangle, et a_1^i, a_2^i les coordonnées du sommet opposé à l'arête i.

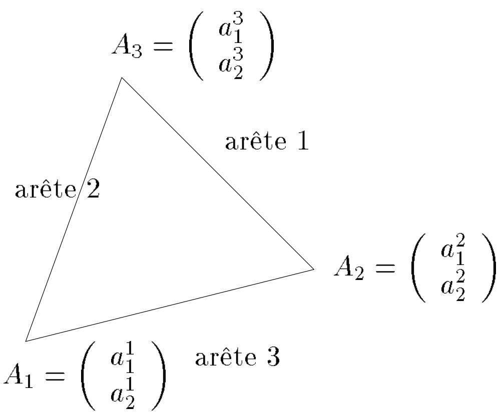


Fig. 2.2 – *Numérotation locale au triangle*

- celles de $Y_{\mathcal{T}}$ sont les constantes par triangle.

On donne les matrices élémentaires pour fixer les idées :

- $M_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \lambda_i \lambda_j \,\mathrm{d}x.$
- $A_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \mathbf{rot}\ \lambda_j . \boldsymbol{\chi_i} \,\mathrm{d}x.$
- $B_{ij} = \displaystyle\int_{T_i} \mathrm{div}\ \boldsymbol{\chi_j} \,\mathrm{d}x.$

Remarque 2.2.1 *La divergence d'une fonction de base de $X_\mathcal{T}$ est constante égale à deux fois le coefficient noté c_K (voir proposition (2.1.2)). Donc une fonction de $X_\mathcal{T}$ à divergence nulle est constante par triangle . De plus,*

$$\forall K \in \mathcal{E}_\mathcal{T},\ \int_K \mathrm{div}\ \boldsymbol{\chi_j} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial K} \boldsymbol{\chi_j} . \mathbf{n} \,\mathrm{d}\gamma = 1$$

donc la matrice B ne contient que des 1 ou des -1, en fonction du signe de la normale extérieure au triangle (normale locale) par rapport à une normale extérieure au domaine (normale globale) fixée globalement sur le maillage pour toutes les arêtes.

2.3 Algorithmes de résolution

On rappelle l'algorithme de résolution choisi en 1996 [Sal96]. On élimine le tourbillon dans la première équation et on reporte sa valeur dans la deuxième, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} \omega_\mathcal{T} & = & M^{-1}(\mathbf{F_1} + A^t \mathbf{u}_\mathcal{T}) \\ AM^{-1}A^t\mathbf{u}_\mathcal{T} - B^t p_\mathcal{T} & = & \mathbf{F_2} - AM^{-1}\mathbf{F_1} \\ -B\mathbf{u}_\mathcal{T} & = & -\mathbf{F_3}. \end{array}$$

On effectue alors un gradient conjugué global sur la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} AM^{-1}A^t & -B^t \\ -B & 0 \end{pmatrix}$$

Les premiers essais ont alors mis en évidence un problème de convergence qui laisse supposer que les matrices sont très mal conditionnées. Pour atténuer ce problème, on a dans un premier temps reconjugué les directions de descente à chaque itération du gradient. Puis dans un deuxième temps, on a eu recours à une pénalisation-dualité (méthode classique en coques suggérée par M. Salaün) qui amène alors à résoudre le problème :

$$\begin{pmatrix} AM^{-1}A^t + cB^tB & -B^t \\ -B & 0 \end{pmatrix}$$

où la constante c est à discrétion ($c = 10^3$ semble heuristiquement le mieux adapté).

Comme la convergence est toujours difficile à atteindre (grand nombre d'itérations - plusieurs centaines - pour une erreur relative à peine de l'ordre de 10^{-10}), la méthode de résolution a été modifiée. Aucune inconnue n'est éliminée, la matrice est traitée globalement :

$$\begin{pmatrix} M & -A^T & 0 \\ -A & 0 & B^T \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F_1} \\ -\mathbf{F_2} \\ \mathbf{F_3} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.3.1 *C'est à ce niveau qu'il est utile de garder le terme en div-div (voir remarque (1.1.1)). En effet cela rajoute un bloc D tel que* $D_{ij} = -\int_K \mathrm{div}\ \boldsymbol{\chi_i}.\mathrm{div}\ \boldsymbol{\chi_j}\,\mathrm{d}x$ *dans le bloc diagonal de la matrice globale :*

$$\begin{pmatrix} M & -A^T & 0 \\ -A & D & B^T \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice globale ne peut être factorisée directement car certains termes diagonaux sont nuls. On remplace alors les termes diagonaux nuls par la valeur 1 et on factorise cette nouvelle matrice. On obtient une « quasi-factorisée » de la matrice initiale utile pour un préconditionement. On effectue alors un gradient conjugué sur la matrice globale, préconditionné par la quasi-factorisée. La convergence a lieu en moins de dix itérations pour une erreur relative de l'ordre de 10^{-15}, erreur que nous n'arrivions pas à atteindre avec le premier choix de résolution.

Du point de vue stockage de la matrice notons qu'il faut utiliser deux modes de stockage pour gagner en place mémoire. En effet, nous avons besoin de la matrice avant factorisation pour le gradient conjugué et de la matrice quasi-factorisée pour préconditionner. La factorisation nécessite un stockage profil (dû au phénomène de remplissage lors de la factorisation) mais le gradient conjugué se contente d'un stockage morse. La matrice est donc assemblée une fois en profil pour la quasi-factorisation et une fois en morse pour le gradient conjugué et la résolution finale [LT93].

2.4 Cas tests

Afin de valider le code, les premiers cas tests utilisés ont été des cas tests analytiques. Le programme a été testé sur deux types de maillages : des maillages réguliers en croisillons (des carrés coupés en quatre par les diagonales, voir la figure 2.3) et des maillages non structurés générés par le mailleur de l'Inria "EMC2"(logiciel Modulef [BGH+88]). Les premiers résultats ont été présentés en partie dans [Sal96], [DSS97a], [DSS97b].

Afin de faire une étude expérimentale de la convergence, les maillages sont dans un premier temps raffinés en rajoutant des noeuds sur le bord du domaine ce qui a l'inconvénient de changer trop de paramètres du maillage en même temps (angle et taille des triangles). Dans un deuxième temps, j'ai développé un module de raffinement homothétique de maillages : chaque triangle du maillage de départ est coupé en quatre. Avec ce type de raffinement, les maillages sont emboîtés, les angles des triangles restent constants donc la régularité au sens mathématique du terme est conservée (voir figure 2.4). La planche (2.5-2.6) représente un maillage non structuré et le maillage suivant raffiné une fois homothétiquement.

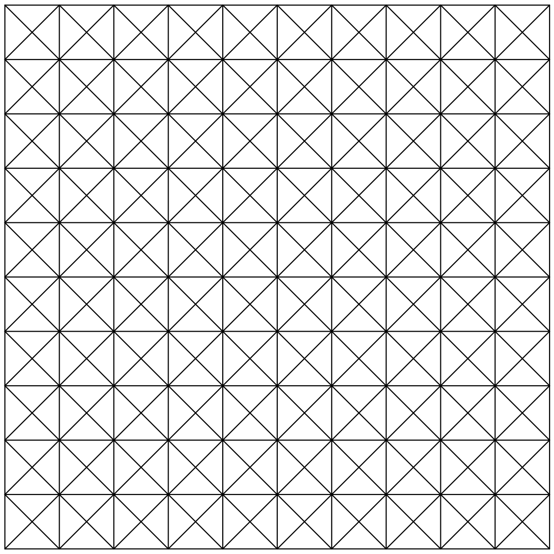


Fig. 2.3 – Maillage en croisillons.

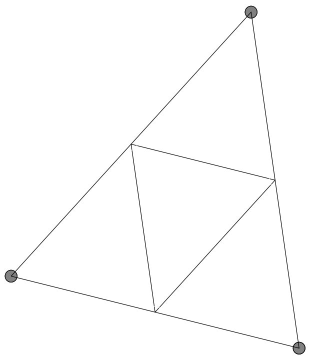


Fig. 2.4 – *Division d'un triangle pour obtenir le maillage homothétique suivant.*

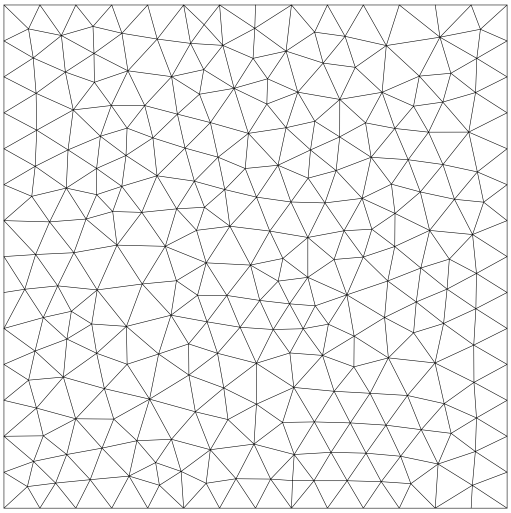


Fig. 2.5 – Un maillage non structuré.

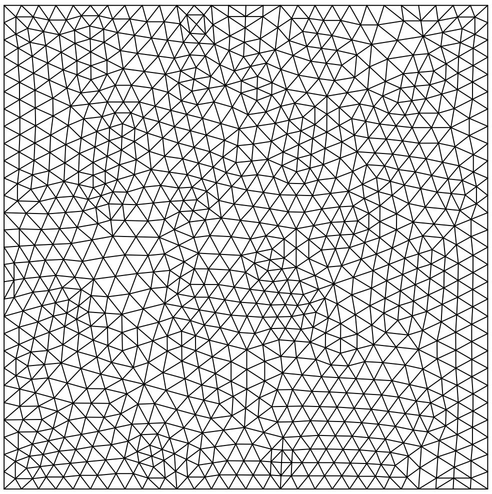


Fig. 2.6 – Le même maillage raffiné homothétiquement une fois.

On s'intéresse en particulier au cas test analytique de Bercovier-Engelman [BE79]. Sur le carré unité, on cherche $(\omega, \mathbf{u}, p)$ solution du problème de Stokes avec une condition limite homogène : $\mathbf{u} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{u}.\mathbf{n} = \mathbf{u}.\mathbf{t} = 0$ sur le bord Γ et un second membre $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ défini par :

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= 256\left(x^2(x-1)^2(12y-6) + y(y-1)(2y-1)(12x^2-12x+2)\right) \\
&+ (y-0.5) \\
f_2(x,y) &= -f_1(y,x)
\end{aligned}
$$

Alors la solution cherchée est la suivante :

$$
\begin{aligned}
\omega(x,y) &= 256(y^2(y-1)^2(6x^2-6x+1) + x^2(x-1)^2(6y^2-6y+1)) \\
u_1(x,y) &= -256y(y-1)(2y-1)x^2(x-1)^2 \\
u_2(x,y) &= 256x(x-1)(2x-1)y^2(y-1)^2 \\
p(x,y) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Les planches 2.8, 2.9, 2.10 montrent la solution exacte interpolée sur un maillage de référence non structuré présenté en figure 2.7.

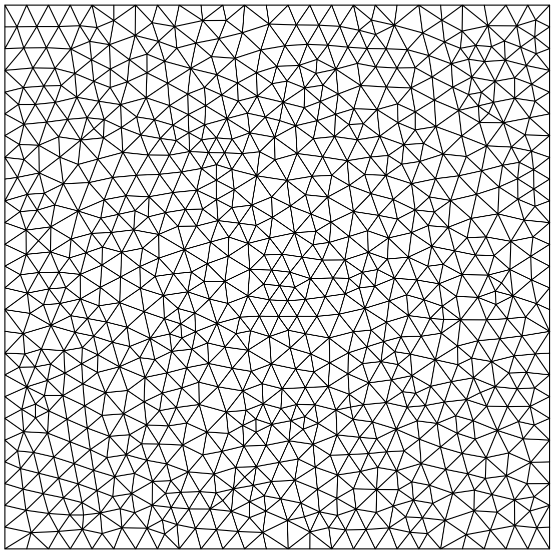


Fig. 2.7 – Maillage non structuré de référence.

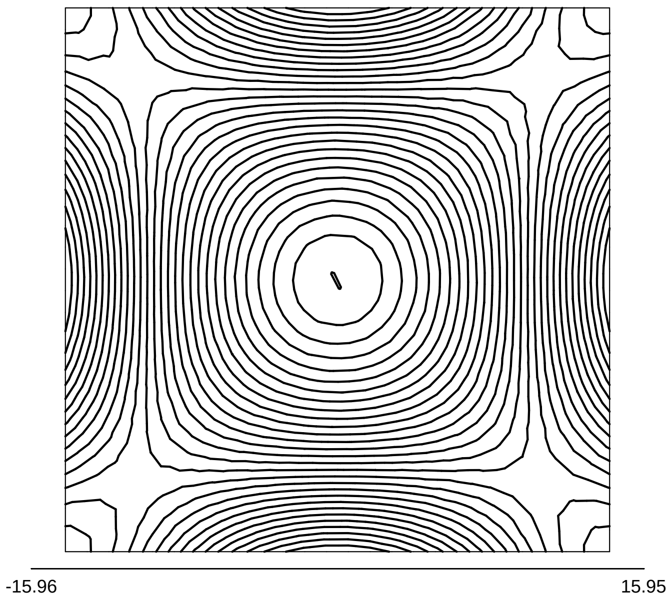


Fig. 2.8 – Tourbillon exact interpolé sur le maillage de référence 2.7.

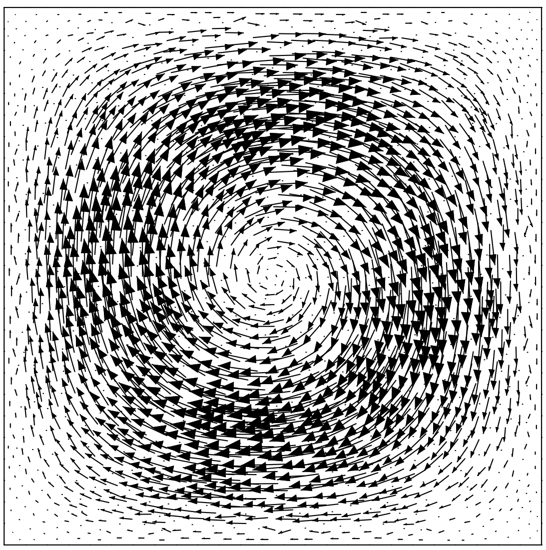


Fig. 2.9 – Vecteurs vitesse exacte interpolés sur le maillage de référence 2.7.

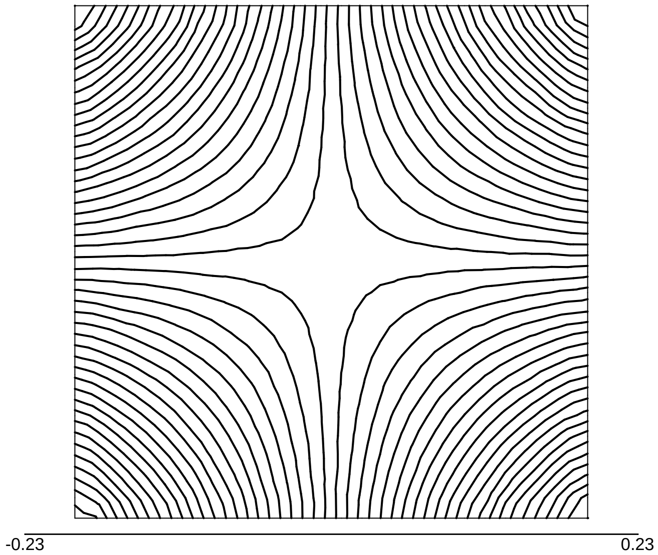


Fig. 2.10 – Pression exacte interpolée sur le maillage de référence 2.7.

Les résultats du code « OMEGA » sont les suivants :

(i) La méthode est numériquement stable et fournit des résultats satisfaisants lorsqu'on utilise une famille de maillages en croisillons (voir figures 2.11, 2.12, 2.13 et comparer avec la solution exacte interpolée figures 2.8, 2.9, 2.10). Lors de raffinements successifs, les expériences que nous avons menées montrent une convergence en norme L^2 d'ordre 2 pour le tourbillon, d'ordre 1 pour la vitesse et d'ordre un peu supérieur à 1 pour la pression (il est écrit 1.32 dans la légende mais le premier point est visiblement « plus mauvais » que les autres, ce qui a pour effet d'augmenter artificiellement la pente de la droite de régression), résultat néanmoins surprenant pour le champ de pression où l'erreur d'interpolation est a priori d'ordre 1 (voir courbe 2.14).
N.B : La pente, terme employé dans les cartouches de chacune des courbes de convergence, est la pente de la droite de régression. Cette pente est calculée même si les points considérés ne sont pas alignés.

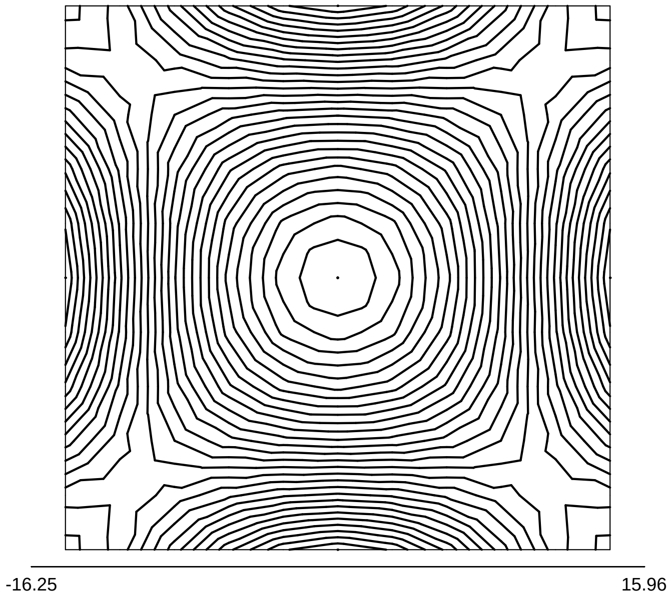


Fig. 2.11 – Isovaleurs du tourbillon sur un maillage régulier.

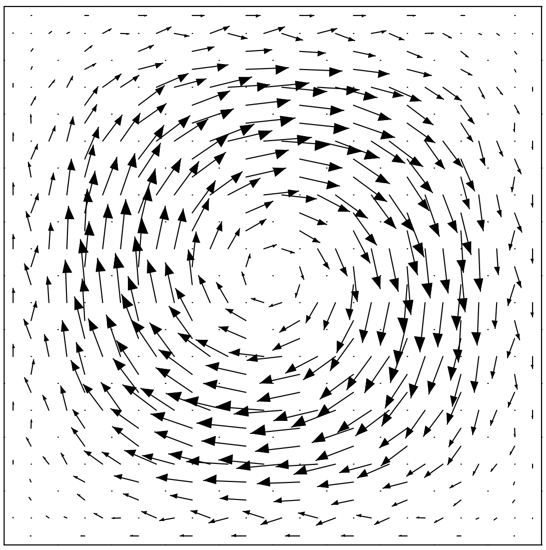


Fig. 2.12 – Vecteurs vitesse sur un maillage régulier.

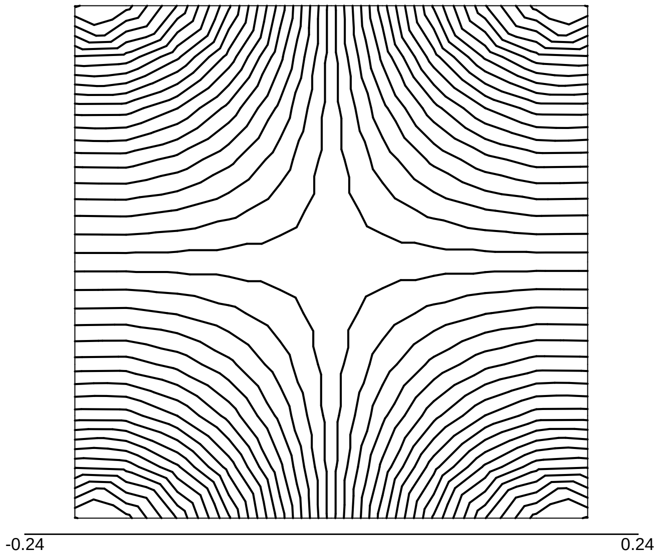


Fig. 2.13 – Isovaleurs de pression sur un maillage régulier.

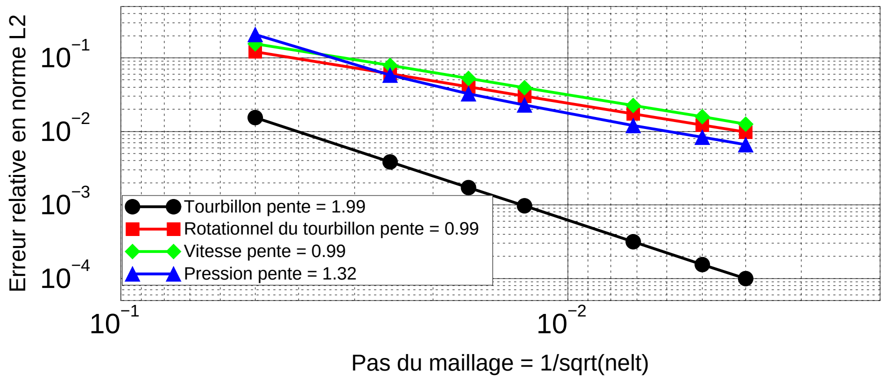


Fig. 2.14 – *Ordre de convergence - maillages réguliers - cas test de Bercovier-Engelman.*

(ii) Pour des maillages non structurés, le comportement du tourbillon et de la pression au bord ne sont pas admissibles pour la qualité requise lors de calculs de mécanique des fluides numérique (voir figures 2.15, 2.17). En particulier l'erreur en norme L^∞ sur ces champs est beaucoup trop importante, le tourbillon variant de -15.91 à 27.07 au lieu de -16.00 à 16.00 et la pression de -7.67 à 6.43 au lieu de -0.25 à 0.25. La figure 2.18 montre la taille des contours de pression dont la valeur dépasse les valeurs extrêmes de la solution analytique (-0.25 à $+0.25$). On pourra voir en annexe A une décomposition de l'erreur faite sur ces deux champs. Sur la figure 2.20, la courbe pleine est la solution exacte interpolée sur les sommets du bord de la triangulation et la courbe en pointillé la valeur du tourbillon obtenue par le calcul sur ces mêmes sommets. Les courbes obtenues avec des maillages contenant de plus en plus d'éléments (2.19) ne donnent une réelle convergence que pour la vitesse (ordre 1 $\sim \mathcal{O}(h_{\mathcal{T}})$). La droite de régression pour le tourbillon et la pression est de pente inférieure à 1. Le rotationnel du tourbillon quant à lui diverge !

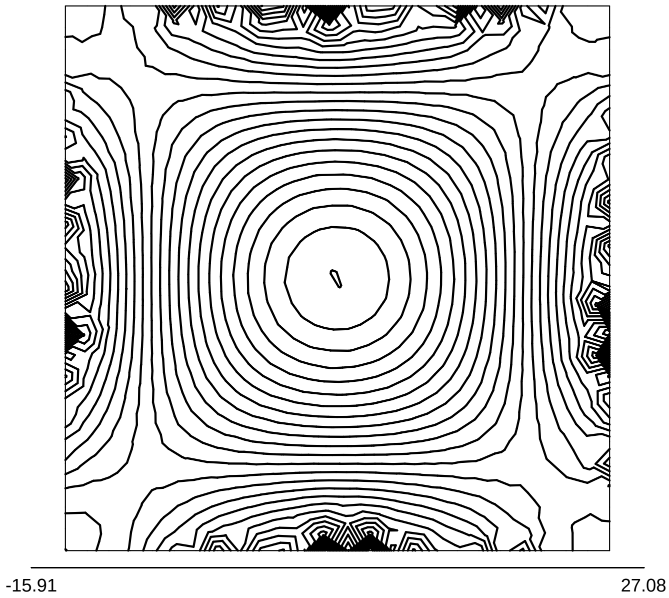


Fig. 2.15 – Isovaleurs du tourbillon sur un maillage non structuré de référence.

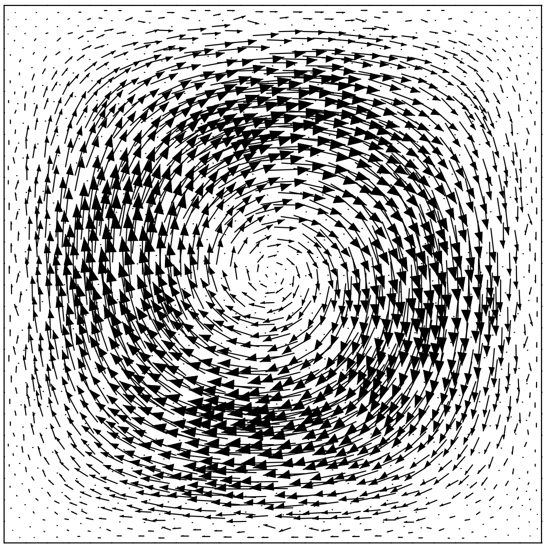


Fig. 2.16 – Vecteurs vitesse sur un maillage non structuré de référence.

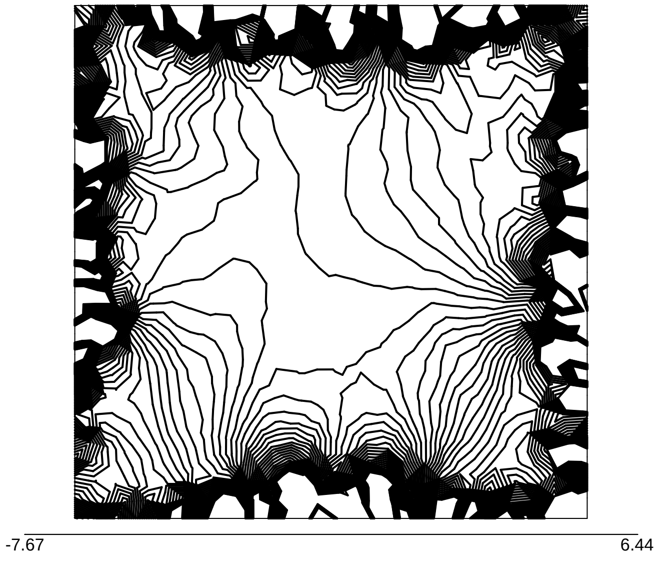


Fig. 2.17 – Isovaleurs de pression sur un maillage non structuré de référence.

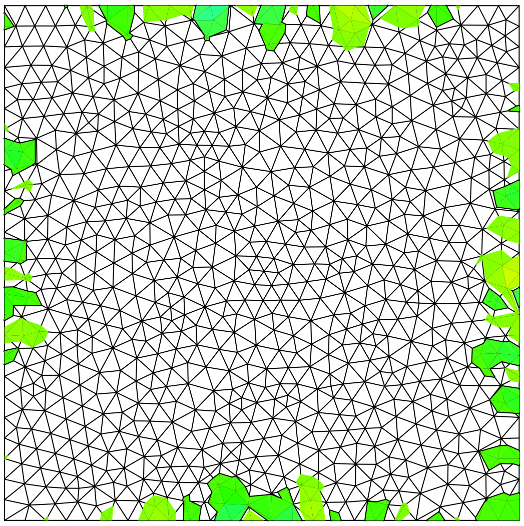


Fig. 2.18 – Contours des parties non admissibles de la pression (en plein).

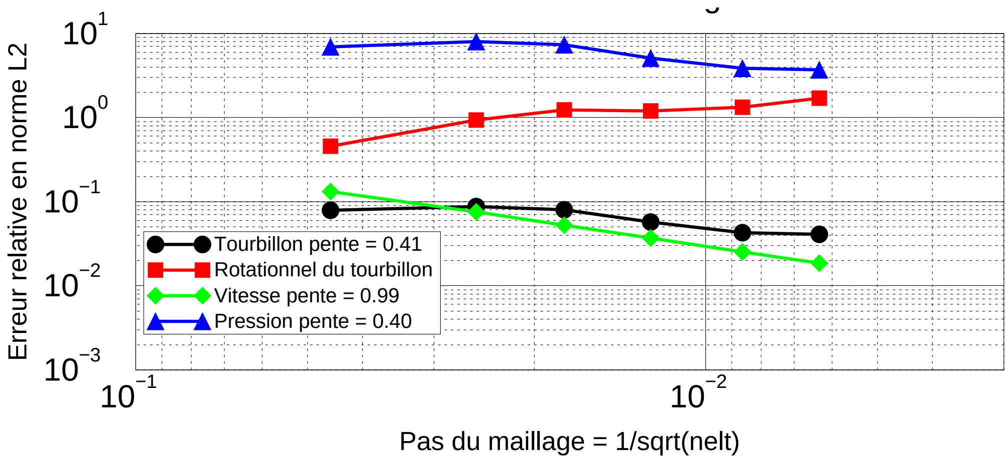


Fig. 2.19 – *Ordre de convergence - maillages non structurés - cas test de Bercovier-Engelman.*

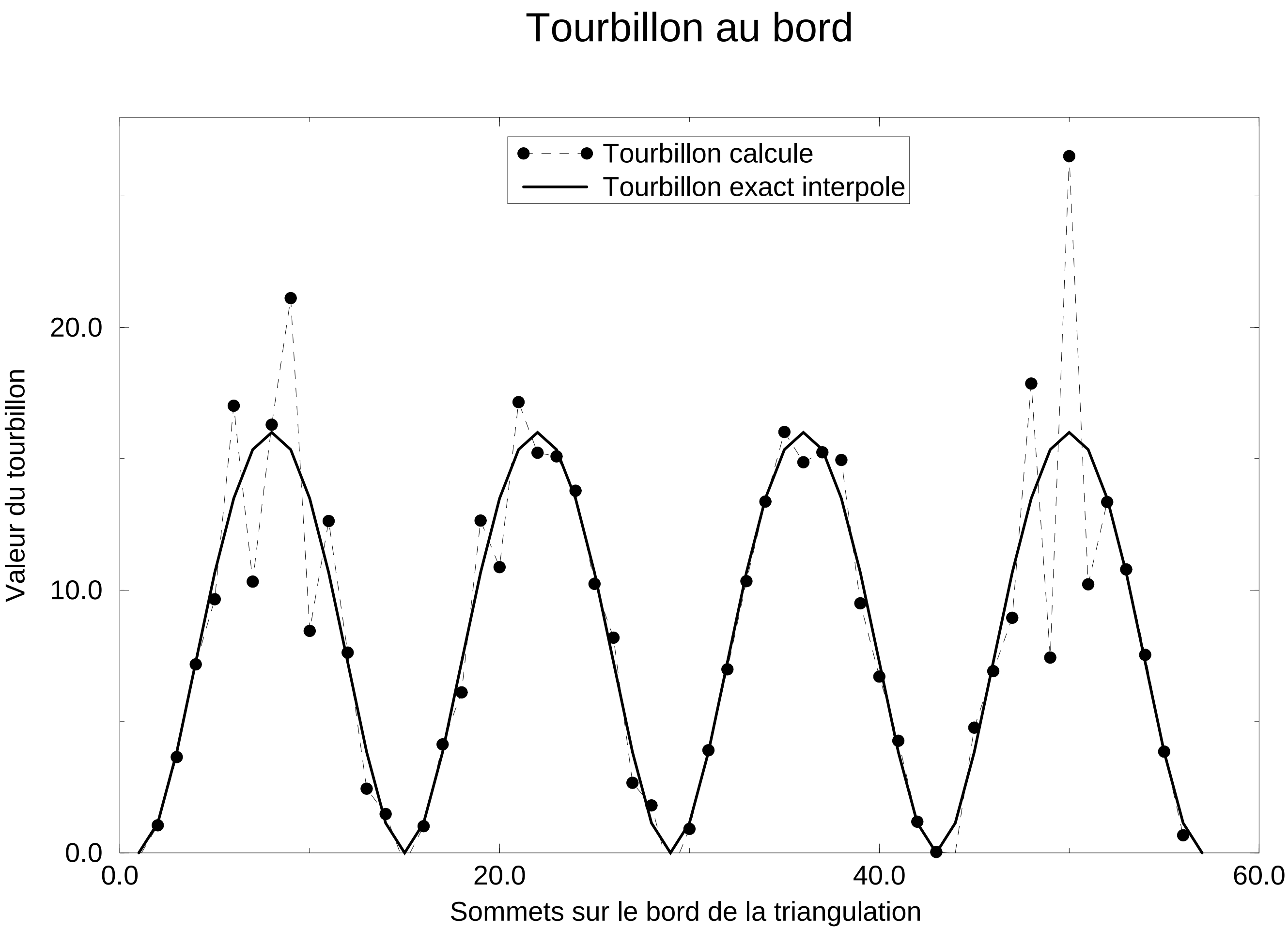


Fig. 2.20 – *Valeur du tourbillon sur le bord du domaine.*

Malgré ces défauts, une courbe de convergence obtenue avec une famille de maillages emboîtés (voir figure 2.4 et un exemple de maillage figure 2.5-2.6) donne les résultats suivants qui sont surprenants : la norme L^2 du tourbillon, de la vitesse et de la pression convergent avec un ordre de précision égal à 1 lorsqu'on raffine plusieurs fois (voir courbe 2.21). Les résultats numériques sont présentés en figures 2.23 et 2.26.

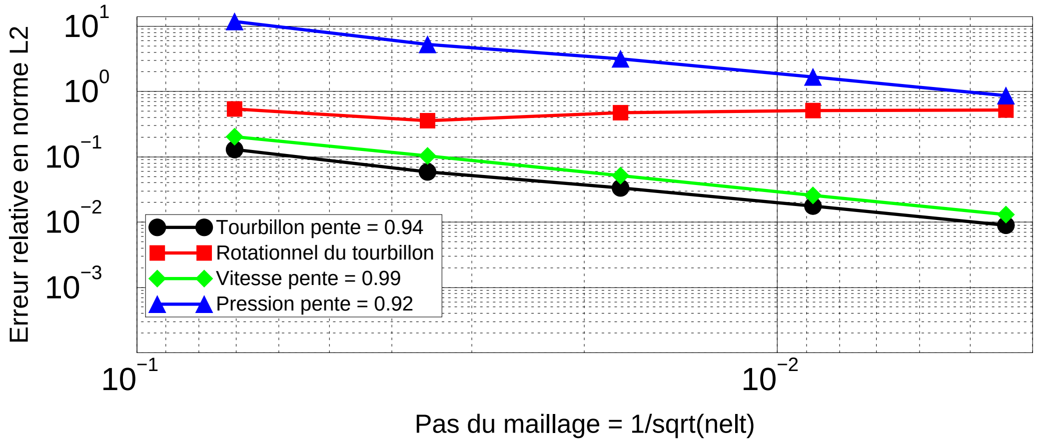


Fig. 2.21 – *Ordre de convergence - maillages emboîtés - cas test de Bercovier-Engelman.*

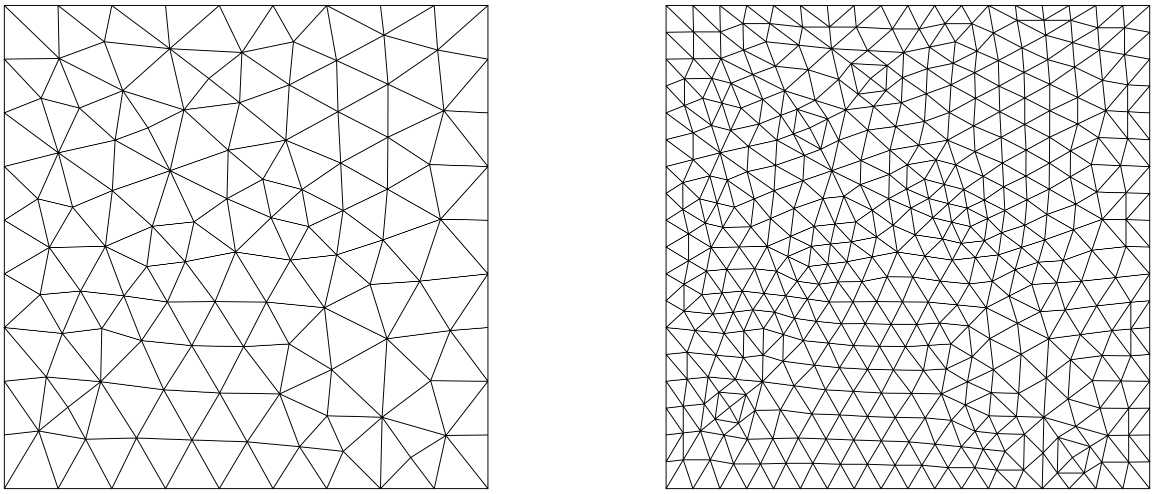


Fig. 2.22 – Maillage non structuré et ce maillage raffiné homothétiquement une fois.

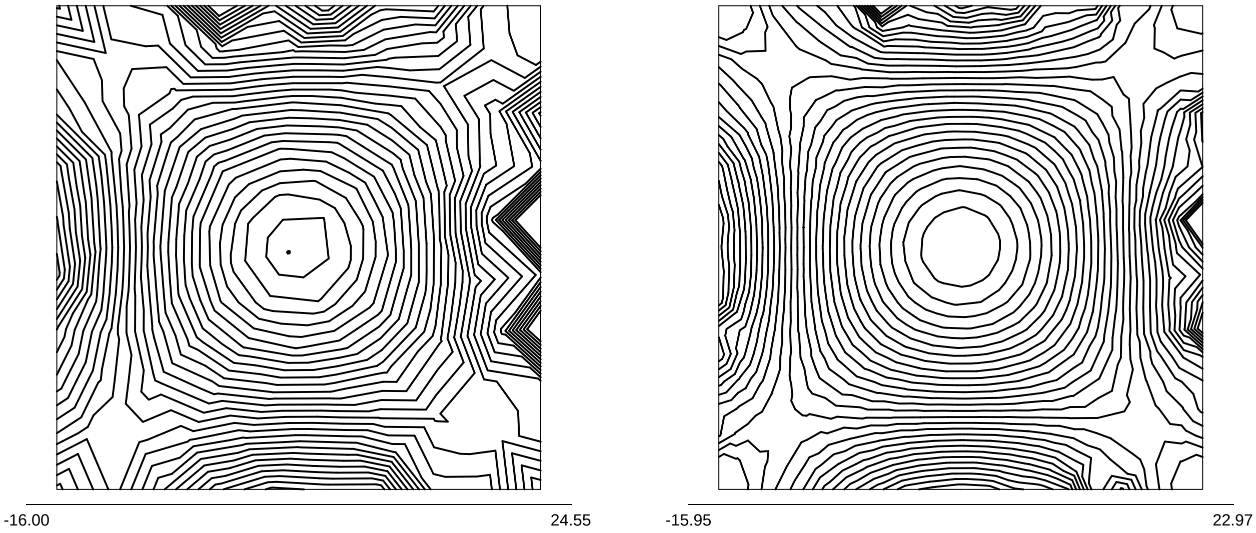


Fig. 2.23 – Isovaleurs du tourbillon sur maillage 2.22 et sur maillage 2.22 raffiné homothétiquement **une fois**.

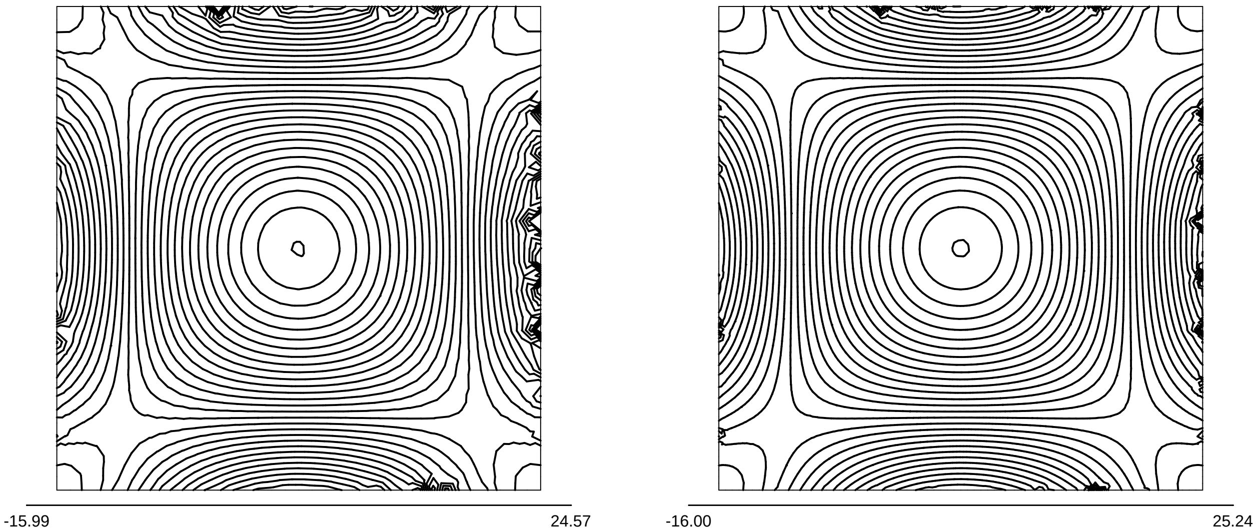


Fig. 2.24 – Isovaleurs du tourbillon sur maillage 2.22 raffiné homothétiquement **deux fois** et sur maillage 2.22 raffiné homothétiquement **trois fois**.

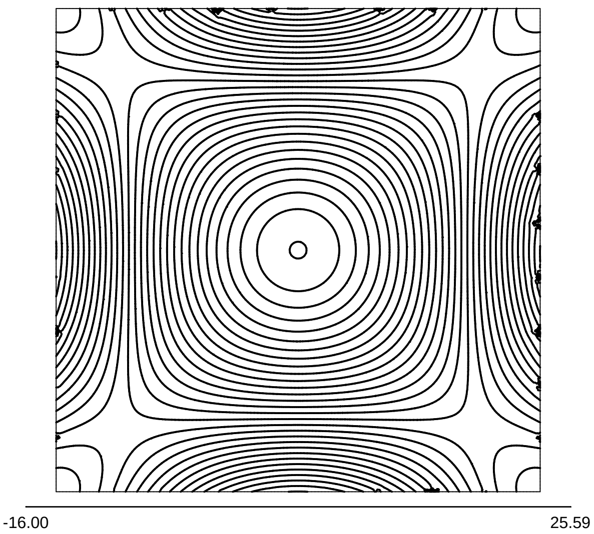


Fig. 2.25 – Isovaleurs du tourbillon sur maillage 2.22 raffiné homothétiquement **quatre fois**.

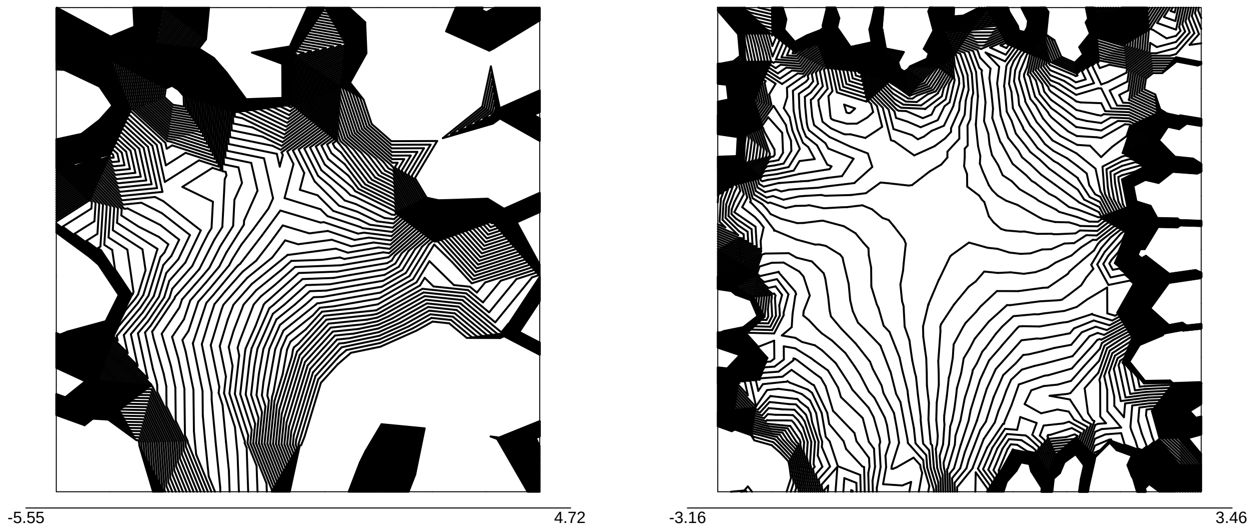


Fig. 2.26 – Isovaleurs de la pression sur maillage 2.22 et sur maillage 2.22 raffiné homothétiquement **une fois**.

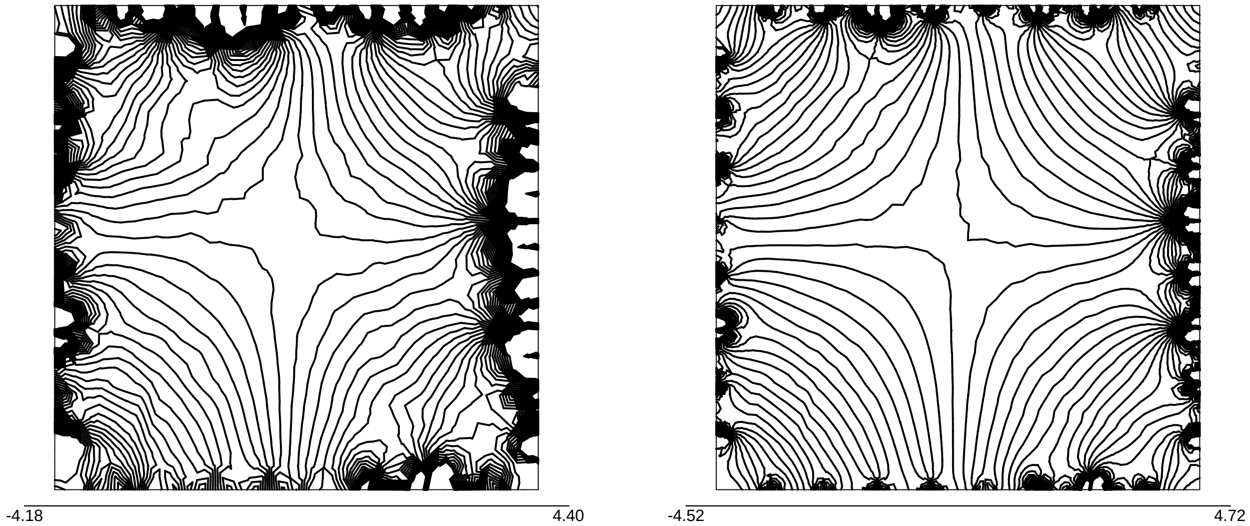


Fig. 2.27 – Isovaleurs de la pression sur maillage 2.22 raffiné homothétiquement **deux fois** et sur maillage 2.22 raffiné homothétiquement **trois fois**.

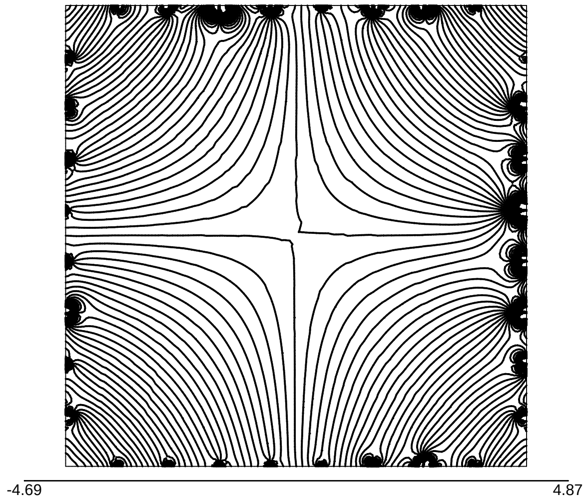


Fig. 2.28 – Isovaleurs de la pression sur maillage 2.22 raffiné homothétiquement **quatre fois**.

2.5 Stabilité et analyse d'erreur dans le cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega$

2.5.1 Stabilité dans le cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega$

Soit le triplet $(\omega, \mathbf{u}, p)$ de $W \times X \times Y$ la solution du problème continu (1.7) et $(\omega_\mathcal{T}, \mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T})$ dans $W_\mathcal{T} \times X_\mathcal{T} \times Y_\mathcal{T}$ celle du problème discret précédent (2.1). On ajoute à chacun des problèmes le terme en div – div comme il est précisé dans la remarque (1.1.1) au chapitre 1. La viscosité sera prise égale à 1 dans toute la suite pour alléger les écritures.

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega, \varphi) - (\mathbf{u}, \mathbf{rot}\ \varphi) & = & <\tau_0, \varphi>_\Gamma & \forall\ \varphi \in W \\ (\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{u}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) - (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - <\Pi_0, \mathbf{v}.\mathbf{n}>_\Gamma & \forall\ \mathbf{v} \in X \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}, q) & = & 0 & \forall\ q \in Y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega_\mathcal{T}, \varphi_\mathcal{T}) - (\mathbf{u}_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) & = & <\tau_0, \varphi_\mathcal{T}>_\Gamma & \forall\ \varphi_\mathcal{T} \in W_\mathcal{T} \\ (\mathbf{rot}\ \omega_\mathcal{T}, \mathbf{v}_\mathcal{T}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{u}_\mathcal{T}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) - (p_\mathcal{T}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\mathcal{T}) - <\Pi_0, \mathbf{v}_\mathcal{T}.\mathbf{n}>_\Gamma & \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T} \in X_\mathcal{T} \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}_\mathcal{T}, q_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ q_\mathcal{T} \in Y_\mathcal{T} \end{array}\right.$$

Comme les espaces $W_\mathcal{T}$, $X_\mathcal{T}$ et $Y_\mathcal{T}$ sont choisis conformes, on a $W_\mathcal{T} \subset W$, $X_\mathcal{T} \subset X$, $Y_\mathcal{T} \subset Y$, donc les équations du problème continu sont aussi vérifiées avec $\varphi = \varphi_\mathcal{T}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathcal{T}$, $q = q_\mathcal{T}$. La différence membre à membre des deux systèmes donne alors :

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega - \omega_\mathcal{T}, \varphi_\mathcal{T}) - (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ \varphi_\mathcal{T} \in W_\mathcal{T} \\ (\mathbf{rot}\ (\omega - \omega_\mathcal{T}), \mathbf{v}_\mathcal{T}) + (\mathrm{div}\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}), \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) - (p - p_\mathcal{T}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T} \in X_\mathcal{T} \\ (\mathrm{div}\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}), q_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ q_\mathcal{T} \in Y_\mathcal{T} \end{array}\right.$$

On introduit l'interpolée $H(\mathrm{div})$ de $\mathbf{u}$ sur le maillage $\mathcal{T}$ que l'on note $\Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}$ (défini proposition 2.1.7), l'interpolée de Lagrange H^1 de ω sur $\mathcal{T}$, notée $\Pi_\mathcal{T}^1\omega$ ([Cia87] p. 78) et enfin l'interpolée de la pression sur $\mathcal{T}$, notée $\Pi_\mathcal{T}^0 p$.
On obtient alors équation par équation :

- $$(\omega - \Pi_\mathcal{T}^1\omega + \Pi_\mathcal{T}^1\omega - \omega_\mathcal{T}, \varphi_\mathcal{T}) - (\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u} + \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) = 0 \quad \forall\ \varphi_\mathcal{T} \in W_\mathcal{T}$$

  soit $\forall\ \varphi_\mathcal{T} \in W_\mathcal{T}$,

  $$(\omega_\mathcal{T} - \Pi_\mathcal{T}^1\omega, \varphi_\mathcal{T}) - (\mathbf{u}_\mathcal{T} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}, \mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) = (\omega - \Pi_\mathcal{T}^1\omega, \varphi_\mathcal{T}) - (\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}, \mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T})$$

- $$\begin{array}{l}(\mathbf{rot}\ (\omega - \Pi_\mathcal{T}^1\omega + \Pi_\mathcal{T}^1\omega - \omega_\mathcal{T}), \mathbf{v}_\mathcal{T}) + (\mathrm{div}\ (\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u} + \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}), \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) \\ \qquad - (p - \Pi_\mathcal{T}^0 p + \Pi_\mathcal{T}^0 p - p_\mathcal{T}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) = 0 \qquad \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T} \in X_\mathcal{T}\end{array}$$

  soit $\forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T} \in X_\mathcal{T}$,

  $$\begin{array}{l}(\mathbf{rot}\ (\omega_\mathcal{T} - \Pi_\mathcal{T}^1\omega), \mathbf{v}_\mathcal{T}) + (\mathrm{div}\ (\mathbf{u}_\mathcal{T} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}), \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) - (p_\mathcal{T} - \Pi_\mathcal{T}^0 p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) \\ \quad = (\mathbf{rot}\ (\omega - \Pi_\mathcal{T}^1\omega), \mathbf{v}_\mathcal{T}) + (\mathrm{div}\ (\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}), \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) - (p - \Pi_\mathcal{T}^0 p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T})\end{array}$$

- $$(\mathrm{div}\ (\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u} + \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}), q_\mathcal{T}) = 0 \quad \forall\ q_\mathcal{T} \in Y_\mathcal{T}$$

  soit $\quad \forall\ q_\mathcal{T} \in Y_\mathcal{T}, \quad (\mathrm{div}\ (\mathbf{u}_\mathcal{T} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}), q_\mathcal{T}) = (\mathrm{div}\ (\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}), q_\mathcal{T})$

On définit le problème auxiliaire suivant :
chercher $(\theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{w}_{\mathcal{T}}, r_{\mathcal{T}})$ dans $W_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{T}} \times Y_{\mathcal{T}}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\theta_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{w}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & (f, \varphi_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{g}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ (\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (r_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & (\mathbf{k}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (l, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) & = & (m, q_{\mathcal{T}}) & \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où $f \in L^2(\Omega),\ \mathbf{g} \in (L^2(\Omega))^2,\ \mathbf{k} \in (L^2(\Omega))^2,\ l \in L^2(\Omega),\ m \in L^2(\Omega)$ sont connues et valent

$$\begin{array}{lcl} f & = & \omega - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \\ \mathbf{g} & = & -(\mathbf{u} - \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) \\ \mathbf{k} & = & \mathbf{rot}\ (\omega - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega) \\ n & = & -(p - \Pi^0_{\mathcal{T}}p) \\ m & = & \mathrm{div}(\mathbf{u} - \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) \\ l & = & m + n \end{array}$$

La stabilité du schéma équivaut à démontrer l'inégalité suivante :
$\exists\ C > 0$ indépendante du maillage telle que

$$\boxed{\| \theta_{\mathcal{T}} \|_W + \| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_X + \| r_{\mathcal{T}} \|_Y \leq C \left(\| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + \| l \|_{0,\Omega} + \| m \|_{0,\Omega}\right)}$$

Proposition 2.5.1 *Stabilité dans le cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega$.*
Si on suppose que $\Gamma_n = \Gamma_\omega$, le problème (2.11) est stable : il existe une constante C indépendante du maillage telle que :

$$\| \theta_{\mathcal{T}} \|_W + \| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_X + \| r_{\mathcal{T}} \|_Y \leq C \left(\| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + \| l \|_{0,\Omega} + \| m \|_{0,\Omega}\right).$$

Preuve :
Les hypothèses suffisantes à la démonstration sont les deux conditions inf-sup discrètes (2.2) et (2.3) :

- a-condition inf-sup (2.2)
  $$\exists\ a > 0\ ,\ \inf_{q \in Y_{\mathcal{T}}} \sup_{\mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}} \frac{(q, \mathrm{div}\ \mathbf{v})}{\| \mathbf{v} \|_X \| q \|_Y} \geq a$$
- b-condition inf-sup (2.3)
  $$\exists\ b > 0\ ,\ \inf_{\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}} \sup_{\varphi \in W_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \mathbf{v} \|_X \| \varphi \|_W} \geq b$$

On utilisera fréquemment l'inégalité classique :

$$ab \leq \frac{\eta}{2}a^2 + \frac{1}{2\eta}b^2, \qquad \forall \eta > 0,\ \text{avec } \eta \text{ positif aussi petit que l'on veut,}$$

sous sa forme la plus simple :

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2. \tag{2.12}$$

Première étape
On fait $\varphi_{\mathcal{T}} = \theta_{\mathcal{T}}$; $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{w}_{\mathcal{T}}$; $q_{\mathcal{T}} = r_{\mathcal{T}}$, on obtient après addition membre à membre des 3 équations issues de (2.11) :

$$\begin{array}{rcl} \| \theta_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} & = & (m, r_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{k}, \mathbf{w}_{\mathcal{T}}) + (l, \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}) + (f, \theta_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{g}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}) \\ & \leq & \| m \|_{0,\Omega}\ \ \| r_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega}\ \ \| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| l \|_{0,\Omega} \| \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \\ & & + \| f \|_{0,\Omega} \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \end{array}$$

Deuxième étape

On utilise la a-condition inf-sup pour majorer la norme de la pression. La condition est la suivante :

$$\exists\, a > 0 \quad \inf_{q \in Y_{\mathcal{T}}} \sup_{\mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathrm{div}\ \mathbf{v},\ q)}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X \quad \|\ q\ \|_Y} \geq a$$

D'où

$$\begin{aligned}
a \,\|\ r_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} &\leq \sup_{\mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathrm{div}\ \mathbf{v}, r_{\mathcal{T}})}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X} \\
&\leq \sup_{\mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) - (l, \mathrm{div}\ v) - (\mathbf{k}, \mathbf{v})}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X} \\
a \,\|\ r_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} &\leq \|\ \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} + \|\ l\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathbf{k}\ \|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

On a utilisé les deux majorations :

$$\|\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}\ \|_{0,\Omega} \leq \|\ \mathbf{v}\ \|_X \qquad \forall \mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}$$

$$\|\ \mathbf{v}\ \|_{0,\Omega} \leq \|\ \mathbf{v}\ \|_X \qquad \forall \mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}$$

Troisième étape

Il nous reste à utiliser la b-condition inf-sup. Mais on ne peut pas directement l'appliquer avec $\mathbf{w}_{\mathcal{T}}$ puisque ce dernier n'est pas dans $V_{\mathcal{T}}$ *a priori* ! Il faut donc construire un intermédiaire qui soit dans $V_{\mathcal{T}}$. Pour cela, on va réutiliser la a-condition inf-sup. On rappelle le théorème de Babuska-Brezzi [Bab71], [Bre74] :

Théorème 2.5.2 *Théorème de Ladyženskaja-Babuska-Brezzi [LU68].*
Soient T et M deux espaces de Hilbert de normes respectives $\|\ \bullet\ \|_T$ et $\|\ \bullet\ \|_M$, de produits scalaires respectifs $(\bullet,\bullet)_T$ et $(\bullet,\bullet)_M$ et d'espaces duaux T' et M'. Soit la forme bilinéaire continue $T \times M \ni (t,\mu) \longmapsto b(t,\mu) \in \mathbb{R}$, l'opérateur $B : T \longrightarrow M'$ et son opérateur dual $B' : M \longrightarrow T'$ définis par :

$$\forall t \in T\ ,\ \forall \mu \in M\ ,\ \ < Bt, \mu > = < t, B'\mu > = b(t,\mu)$$

On définit le noyau (à gauche) de $b(\bullet,\bullet)$, V, son polaire V^0 et son orthogonal $V^\perp$:

$$V = \{t \in T\ ,\ b(t,\mu) = 0\ ,\ \forall \mu \in M\}$$

$$V^0 = \left\{\theta \in T'\ ,\ < \theta, t >_{T',T} = 0\ ,\ \forall t \in V\right\}$$

$$V^\perp = \{\theta \in T\ ,\ (\theta,\rho) = 0\ ,\ \forall \rho \in V\}$$

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \exists \beta > 0\ ,\ \inf_{\substack{\mu \in M \\ \mu \neq 0}} \sup_{\substack{t \in T \\ t \neq 0}} \frac{b(t,\mu)}{\|\ t\ \|_T \|\ \mu\ \|_M} \geq \beta$$

(ii) B' est un isomorphisme de M sur V^0 et

$$\forall \mu \in M\ ,\ \ \|\ B'\mu\ \|_{T'} \geq \beta \,\|\ \mu\ \|_M \quad \text{avec la même constante } \beta$$

(iii) B est un isomorphisme de $V^\perp$ sur M' et

$$\forall t \in V^\perp\ ,\ \ \|\ Bt\ \|_{M'} \geq \beta \,\|\ t\ \|_T \quad \text{avec la même constante } \beta.$$

La $a-$ condition inf-sup équivaut donc à dire que la fonctionnelle B définie par :

$$\forall \mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}\ ,\ \forall q \in Y_{\mathcal{T}}\ \ < B\mathbf{v}, q >= (\text{div }\mathbf{v}, q)$$

est un isomorphisme de $V_{\mathcal{T}}^{\perp}$ sur $Y_{\mathcal{T}}'$ et est telle que :

$$\forall \mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}},\ \forall\ w \in V_{\mathcal{T}}\ \ (\mathbf{v}, w) = 0\} \quad \| B\mathbf{v} \|_{Y'} \geq a \| \mathbf{v} \|_X$$

Ceci entraîne l'existence d'un $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ dans $V_{\mathcal{T}}^{\perp}$ (donc dans $X_{\mathcal{T}}$) tel que

$$(\text{div }\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q) = (m, q) \quad \forall q \in Y_{\mathcal{T}}$$

et qui vérifie l'inégalité suivante

$$\| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X \leq \frac{1}{a} \| m \|_{0,\Omega}\ .$$

(En effet, m appartient bien à $Y_{\mathcal{T}}'$ car m est une forme linéaire sur $Y_{\mathcal{T}}$ de dimension finie donc m est continue et définit bien un élément du dual de $Y_{\mathcal{T}}$.) Posons alors $z_{\mathcal{T}} = \mathbf{w}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}$, $z_{\mathcal{T}}$ appartient alors à $V_{\mathcal{T}}$, appliquons la b-condition inf-sup :

$$\begin{aligned}
b \| z_{\mathcal{T}} \|_X &\leq \sup_{\varphi \in W_{\mathcal{T}}} \frac{(z_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \varphi \|_W} \\
&\leq \sup_{\varphi \in W_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{w}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \varphi \|_W} \\
&\leq \sup_{\varphi \in W_{\mathcal{T}}} \frac{(\theta_{\mathcal{T}}, \varphi) - (f, \varphi) - (\mathbf{g}, \mathbf{rot}\ \varphi) - (\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \varphi \|_W} \\
&\leq \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \\
&\leq \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{a} \| m \|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

<u>N.B</u> :

$$\begin{aligned}
\| \varphi \|_{0,\Omega} &\leq \| \varphi \|_W \quad \forall \varphi \in W_{\mathcal{T}} \\
\| \mathbf{rot}\ \varphi \|_{0,\Omega} &\leq \| \varphi \|_W \quad \forall \varphi \in W_{\mathcal{T}}
\end{aligned}$$

Donc, en conclusion de cette étape :

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_X &= \| z_{\mathcal{T}} + \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X \leq \| z_{\mathcal{T}} \|_X + \| \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \|_X \\
&\leq \frac{1}{b} \left\{ \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{a} \| m \|_{0,\Omega} \right\} + \frac{1}{a} \| m \|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

soit

$$\| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_X \leq \frac{1}{b} \left\{ \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \left(\frac{b+1}{a} \right) \| m \|_{0,\Omega} \right\}$$

<u>Quatrième étape</u>

Faisons le bilan des inégalités déjà démontrées :

$$\begin{aligned}
\| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 + \| \text{div }\mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 \leq\ & \| m \|_{0,\Omega} \| r_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| l \|_{0,\Omega} \| \text{div }\mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \\
+\ & \| f \|_{0,\Omega} \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

Ce qui donne, grâce à (2.12),

$$\begin{aligned}\| \theta_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} + \| \operatorname{div} \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} \quad \leq \quad & \| m \|_{0,\Omega} \| r_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| l \|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| \operatorname{div} \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} \\ + \quad & \frac{1}{2} \| f \|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| \theta_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \| \theta_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| \operatorname{div} \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} \quad \leq \quad & \| m \|_{0,\Omega} \| r_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| l \|^2_{0,\Omega} \\ + \quad & \frac{1}{2} \| f \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}\end{aligned} \tag{2.13}$$

qui contrôle la norme L^2 du tourbillon et la divergence de toute la vitesse, puis :

$$\| r_{\mathcal{T}} \|_Y \quad \leq \quad \frac{1}{a} \big(\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \operatorname{div} \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + \| l \|_{0,\Omega} \big)$$

qui contrôle la pression, la vitesse est elle majorée par :

$$\| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_X \quad \leq \quad \frac{1}{b} \left\{ \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \left(\frac{b+1}{a} \right) \| m \|_{0,\Omega} \right\}$$

Dans le cas déjà supposé au chapitre 1 où $\Gamma_n = \Gamma_\omega$, on peut terminer la démonstration : en effet on peut prendre $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}$ dans la deuxième équation du problème (2.11), puisque dans ce cas, on a bien $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n}|_{\Gamma_n} = \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}.\mathbf{n}|_{\Gamma_n} = \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}.\mathbf{n}|_{\Gamma_\omega} = \partial_{\mathbf{t}}\ \theta_{\mathcal{T}}|_{\Gamma_\omega} = 0$ car $\theta_{\mathcal{T}}$ est nul sur Γ_ω. On a donc :

$$(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}) \quad + \quad (\operatorname{div} \mathbf{w}_{\mathcal{T}}, \operatorname{div} \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}) - (r_{\mathcal{T}}, \operatorname{div} \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}) = (\mathbf{k}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}) + (l, \operatorname{div} \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}})$$

soit

$$\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} \quad \leq \quad \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \quad \text{car div } \mathbf{rot} \equiv 0$$

et donc :

$$\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \quad \leq \quad \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega}$$

Tous les termes à droite de l'inégalité (2.13) sont désormais contrôlés et l'inégalité de stabilité de la proposition 2.5.1 est démontrée. ■

2.5.2 Analyse d'erreur dans le cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega$

La stabilité vue au sous-paragraphe précédent est une étape dans la démonstration de la convergence de la méthode et l'analyse d'erreur. En effet, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\| \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_W \quad & \leq \quad \| \omega - \Pi^1_{\mathcal{T}} \omega \|_W \quad + \| \Pi^1_{\mathcal{T}} \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_W \\ \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_X \quad & \leq \quad \| \mathbf{u} - \Pi^{\operatorname{div}}_{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_X \quad + \| \Pi^{\operatorname{div}}_{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_X \\ \| p - p_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \quad & \leq \quad \| p - \Pi^0_{\mathcal{T}} p \|_{0,\Omega} \quad + \| \Pi^0_{\mathcal{T}} p - p_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Le premier terme est connu, c'est l'erreur de consistance donnée par les résultats classiques d'interpolation dans les espaces d'éléments finis choisis. Il reste à majorer le deuxième terme. Or ce terme est justement la solution du problème auxiliaire (2.11) :

$$\theta_{\mathcal{T}} = \omega_{\mathcal{T}} - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \ , \ \mathbf{w}_{\mathcal{T}} = \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u} \ , \ r_{\mathcal{T}} = p_{\mathcal{T}} - \Pi^0_{\mathcal{T}}p$$

On a donc d'après le sous-paragraphe précédent l'inégalité de stabilité suivante (C désignant diverses constantes indépendantes du maillage) :

$$\begin{aligned}
\| \omega_{\mathcal{T}} - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \|_W + \| \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u} \|_X + \| p_{\mathcal{T}} - \Pi^0_{\mathcal{T}}p \|_{0,\Omega} \ &\leq \ C\,(\| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \\
&+ \ \| l \|_{0,\Omega} + \| m \|_{0,\Omega})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \ C\Big(\| \omega - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \|_{0,\Omega} + \| \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u} - \mathbf{u} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ (\omega - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega) \|_{0,\Omega} \\
&+ \ \| \mathrm{div}(\mathbf{u} - \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) + \Pi^0_{\mathcal{T}}p - p \|_{0,\Omega} + \| \mathrm{div}(\mathbf{u} - \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) \|_{0,\Omega}\Big) \\
&\leq \ C\Big(\| \omega - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \|_W + \| \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u} - \mathbf{u} \|_X + \| \Pi^0_{\mathcal{T}}p - p \|_{0,\Omega}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Et on retrouve à nouveau l'erreur d'interpolation. Reste à utiliser les résultats connus sur l'interpolation qui sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 2.5.3 *Erreur d'interpolation.*
Si $\omega \in H^2(\Omega), \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2, \mathrm{div}\ \mathbf{u} \in H^1(\Omega), p \in H^1(\Omega)$ *alors il existe* C *constante indépendante du maillage* $\mathcal{T}$ *telle que*

$$\| \omega - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \|_W \leq C h_{\mathcal{T}} \| \omega \|_{2,\Omega}$$

$$\| \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u} - \mathbf{u} \|_X \leq C h_{\mathcal{T}} \left(\| \mathbf{u} \|_{1,\Omega} + \| \mathrm{div}\ \mathbf{u} \|_{1,\Omega}\right)$$

$$\| \Pi^0_{\mathcal{T}}p - p \|_{0,\Omega} \leq C h_{\mathcal{T}} \| p \|_{1,\Omega}$$

où $h_{\mathcal{T}}$ *est le pas du maillage.*

preuve
Les résultats d'interpolation pour le tourbillon et pour la pression sont classiques (voir par exemple [Cia87]). Quant à la vitesse, on réfère à l'article de Raviart et Thomas [RT77]. ■
On obtient alors le théorème de convergence

Théorème 2.5.4 *Convergence dans le cas* $\Gamma_n = \Gamma_\omega$.
Sous les hypothèses $\Gamma_n = \Gamma_\omega$ *et* $M^0(\Omega; \Gamma_p, \Gamma_n) = \{0\}$ *et si* $\omega \in H^2(\Omega), \mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2, \mathrm{div}\ \mathbf{u} \in H^2(\Omega), p \in H^1(\Omega)$ *alors*

$$\| \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_W + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_X + \| p - p_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \leq C h_{\mathcal{T}} \left(\| \omega \|_{2,\Omega} + \| \mathbf{u} \|_{2,\Omega} + \| \mathrm{div}\ \mathbf{u} \|_{2,\Omega} + \| p \|_{1,\Omega}\right).$$

preuve
Dans le cas où $\Gamma_n = \Gamma_\omega$ et $M^0(\Omega; \Gamma_p, \Gamma_n) = \{0\}$, on a vu au premier chapitre que le problème de Stokes en formulation tourbillon-vitesse-pression a une solution et une seule et au sous-paragraphe précédent qu'il est stable au sens défini ici. ■

La planche 2.29, 2.30, 2.31 est une illustration de la stabilité et de la convergence dans le cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega$. En effet, on décide de travailler sur le cas test de Bercovier-Engelman en changeant les conditions limites. On impose la vitesse normale à zéro sur toute la frontière du domaine, et le tourbillon à sa valeur exacte interpolée sur les sommets du bord Γ. On a alors $\Gamma_n = \Gamma_\omega = \Gamma$ et les résultats sur maillage structuré et non structuré sont infiniment meilleurs qu'avant comme le montrent les figures 2.29-2.30-2.31. Sur la courbe de convergence 2.32, on peut voir que la norme L^2 du tourbillon converge en $\mathcal{O}(h_\mathcal{T})$ ainsi que la norme L^2 de la vitesse et que la norme L^2 de la pression converge en $\mathcal{O}(h_\mathcal{T}^{3/2})$! L'erreur sur la pression étant majorée par l'erreur d'interpolation, on s'attendait au maximum à une convergence d'ordre 1. Or la pression converge avec un ordre largement supérieur à 1, ordre qui n'est pas expliqué pour l'instant.

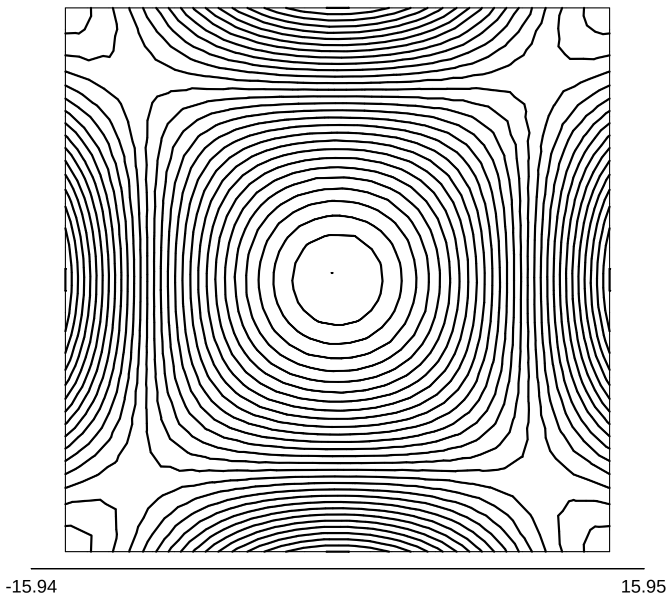


Fig. 2.29 – Isovaleurs du tourbillon sur un maillage non structuré de référence (cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega = \Gamma$).

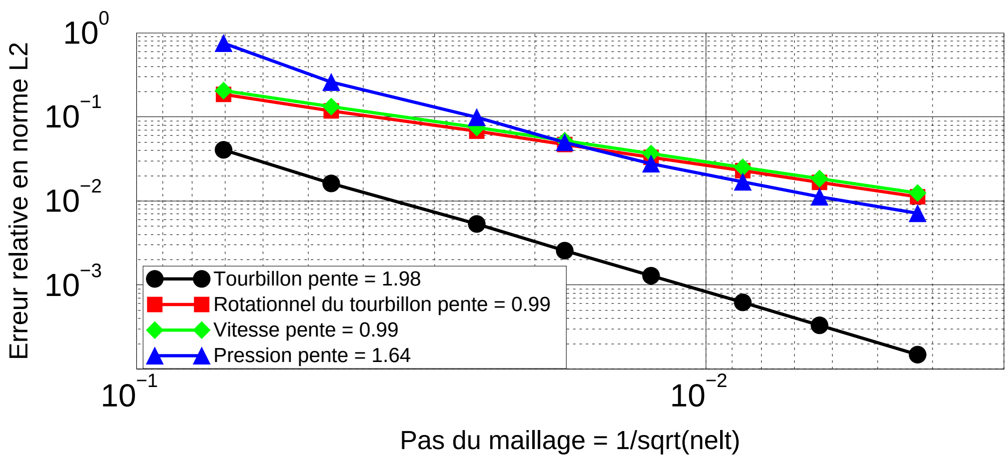


Fig. 2.32 – *Ordre de convergence - maillages non structurés - cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega = \Gamma$.*

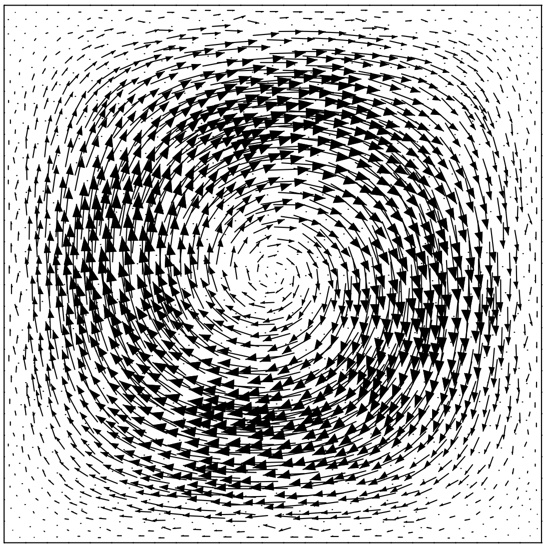


Fig. 2.30 – Vecteurs vitesse sur un maillage non structuré de référence (cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega = \Gamma$).

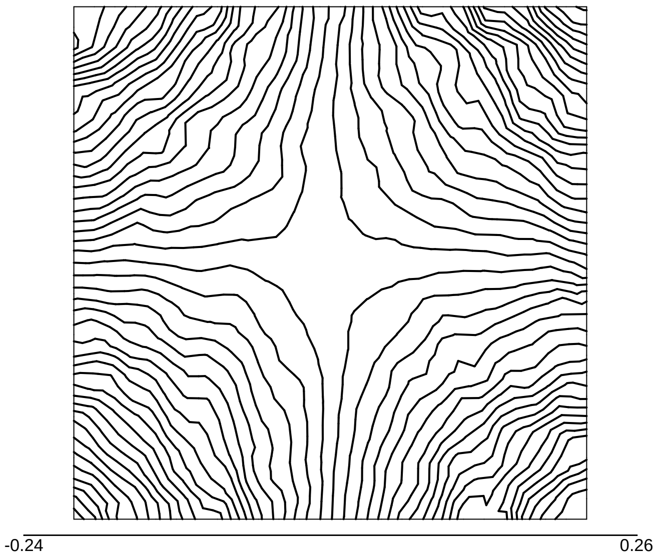


Fig. 2.31 – Isovaleurs de pression sur un maillage non structuré de référence (cas $\Gamma_n = \Gamma_\omega = \Gamma$).

2.6 Non stabilité du schéma dans le cas général

Afin de comprendre l'origine mathématique du problème mis en évidence lors des expériences numériques, nous avons tenté de montrer une condition de stabilité pour le problème discret dans le cas de conditions limites générales. Cette condition, si elle est vraie, permet l'étude d'erreur du schéma comme on l'a vu au paragraphe précédent. Cette étude n'a pas abouti dans les autres cas de conditions limites que celui présenté au paragraphe précédent. Reprenons le déroulement de la démonstration du sous-paragraphe de stabilité et mettons en évidence la difficulté.

Les trois premières étapes sont inchangées mais on voit au vu du bilan d'équations de la quatrième étape que l'énergie du tourbillon $\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}$ n'est pas contrôlée par les trois premières étapes. Pour cela, il faudrait pouvoir prendre $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}$ dans la deuxième équation de (2.11) comme il a été fait au paragraphe précédent. Mais le problème réside dans la compatibilité des conditions limites. En effet, $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n}$ doit s'annuler sur la partie Γ_n du bord et si on choisit $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}$, alors $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n}|_{\Gamma_n} = \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}.\mathbf{n}|_{\Gamma_n} = \partial_{\mathbf{t}}\theta_{\mathcal{T}}|_{\Gamma_n}$. C'est-à-dire, $\theta_{\mathcal{T}}$ devrait être constant sur la partie Γ_n du bord, ce qui n'a aucune raison d'être. Dans tout autre cas de conditions limites le problème n'est pas stable et l'analyse d'erreur ne peut être menée à terme.

Remarque 2.6.1 *La démonstration de l'existence dans d'autres cas de conditions limites que celui-là est en cours ([DSS00]). Dans les cas tests numériques que nous avons effectués, l'hypothèse $\Gamma_n = \Gamma_\omega$ n'est jamais vérifiée donc les problèmes rencontrés ne sont pas contradictoires avec cette hypothèse (il y a visiblement existence et unicité de la solution -* cf *proposition 2.1.4 - mais pas stabilité).*

2.7 Une première idée de stabilisation

Comme nous avons constaté qu'on ne pouvait contrôler le rotationnel du tourbillon, la première idée afin de stabiliser le problème est de rajouter dans la première équation de (2.1) le terme $\varepsilon(\mathbf{rot}\ \bullet, \mathbf{rot}\ \bullet)$ où ε est un réel positif petit à définir lié à une pénalisation car $\varepsilon(\mathbf{rot}\ \bullet, \mathbf{rot}\ \bullet)$ est non consistant avec le modèle (il n'apparaît pas dans les équations).

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) + \varepsilon(\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & < \tau_0, \varphi_{\mathcal{T}} >_\Gamma & \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ (\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (p_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - < \Pi_0, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n} >_\Gamma & \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) & = & 0 & \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \end{array} \right.$$

Pour démontrer la stabilité, on suit exactement la même démarche, et on définit alors le problème auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\theta_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) + \varepsilon(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{w}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & (f, \varphi_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{g}', \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ (\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (r_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & (\mathbf{k}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (l, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) & = & (m, q_{\mathcal{T}}) & \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \end{array} \right.$$

où $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \varepsilon\ \mathbf{rot}\ \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega$. La première étape est modifiée de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} \| \theta_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} & \leq & \| m \|_{0,\Omega} \quad \| r_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \quad \| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \\ & + & \| l \|_{0,\Omega} \| \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \\ & + & \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \end{array}$$

Ce qui donne, grâce à la formule (2.12) :

$$\begin{aligned}
\| \theta_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathrm{div}\ \mathbf{w}_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} \leq\ & \| m \|_{0,\Omega} \quad \| r_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \quad \| \mathbf{w}_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} \\
+\ & \frac{1}{2} \| f \|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{2\varepsilon} \| \mathbf{g} \|^2_{0,\Omega} \\
+\ & \frac{\varepsilon}{2} \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \Pi^1_\mathcal{T} \omega \|^2_{0,\Omega} + \frac{\varepsilon}{4} \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} \\
+\ & \frac{1}{2} \| l \|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| \mathrm{div}\ \mathbf{w}_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \| \theta_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| \mathrm{div}\ \mathbf{w}_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} + \frac{\varepsilon}{4} \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} \leq\ & \| m \|_{0,\Omega} \quad \| r_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \quad \| \mathbf{w}_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{2} \| f \|^2_{0,\Omega} \\
+\ & \frac{1}{2} \| l \|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2\varepsilon} \| \mathbf{g} \|^2_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \Pi^1_\mathcal{T} \omega \|^2_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

Et la troisième :

$$\begin{aligned}
b \| z_\mathcal{T} \|_X \leq\ & \sup_{\varphi \in W_\mathcal{T}} \frac{(z_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \varphi \|_W} \\
\leq\ & \sup_{\varphi \in W_\mathcal{T}} \frac{(\mathbf{w}_\mathcal{T} - \mathbf{v}_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \varphi \|_W} \\
\leq\ & \sup_{\varphi \in W_\mathcal{T}} \frac{(\theta_\mathcal{T}, \varphi) + \varepsilon(\mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \varphi) - (f, \varphi) - (\mathbf{g}, \mathbf{rot}\ \varphi) - (\mathbf{v}_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \varphi \|_W} \\
\leq\ & \| \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{v}_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} \\
\leq\ & \| \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{a} \| m \|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{w}_\mathcal{T} \|_X =\ & \| z_\mathcal{T} + \mathbf{v}_\mathcal{T} \|_X \leq \| z_\mathcal{T} \|_X + \| \mathbf{v}_\mathcal{T} \|_X \\
\leq\ & \frac{1}{b} \left\{ \| \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{a} \| m \|_{0,\Omega} \right\} + \frac{1}{a} \| m \|_{0,\Omega} \\
\| \mathbf{w}_\mathcal{T} \|_X \leq\ & \frac{1}{b} \left\{ \| \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \left(\frac{b+1}{a} \right) \| m \|_{0,\Omega} \right\}
\end{aligned}$$

D'où en conclusion, une inégalité finale de la forme

$$\begin{aligned}
\| \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{w}_\mathcal{T} \|_X + \| r_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} \leq\ & C \Big(\| f \|_{0,\Omega} + \frac{1}{2\varepsilon} \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \Pi^1_\mathcal{T} \omega \|_{0,\Omega} \\
+\ & \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + \| l \|_{0,\Omega} + \| m \|_{0,\Omega} \Big)
\end{aligned}$$

Ce qui donne théoriquement la stabilité, et la convergence si $\frac{1}{2\varepsilon} \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \varepsilon \| \mathbf{rot}\ \Pi^1_\mathcal{T} \omega \|_{0,\Omega}$ peut être rendu arbitrairement petit par un bon choix de ε (ce qui est difficile à réaliser pratiquement). D'ailleurs les résultats numériques de cette stabilisation ne sont pas satisfaisants. En effet, sur le cas test de Bercovier-Engelman, la solution numérique est stable au sens où le résultat sur un maillage régulier ou non est le même mais elle est FAUSSE ! Autrement dit il n'y a pas convergence. On présente en figures 2.33 à 2.38 les résultats obtenus en tourbillon et pression pour différentes valeurs de ε. Le tourbillon est plus satisfaisant pour $\varepsilon = 10^{-3}$ qu'en non-stabilisé (voir pour cela le tableau de l'erreur relative 2.1) mais la pression est fausse pour toute valeur de ε, malgré la valeur de l'erreur.

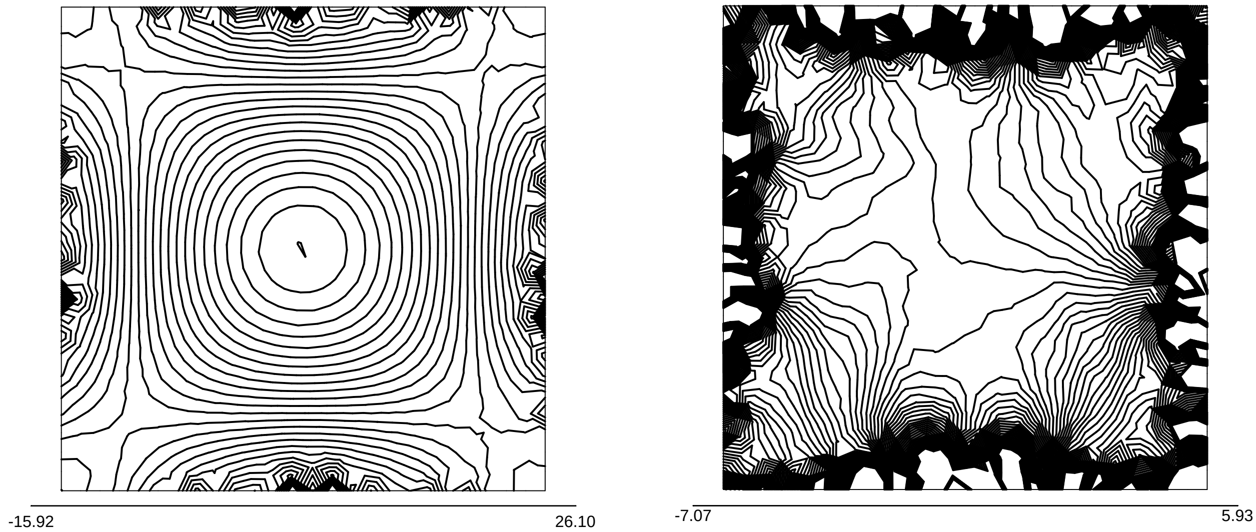


Fig. 2.33 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré de référence ($\varepsilon = 10^{-5}$).

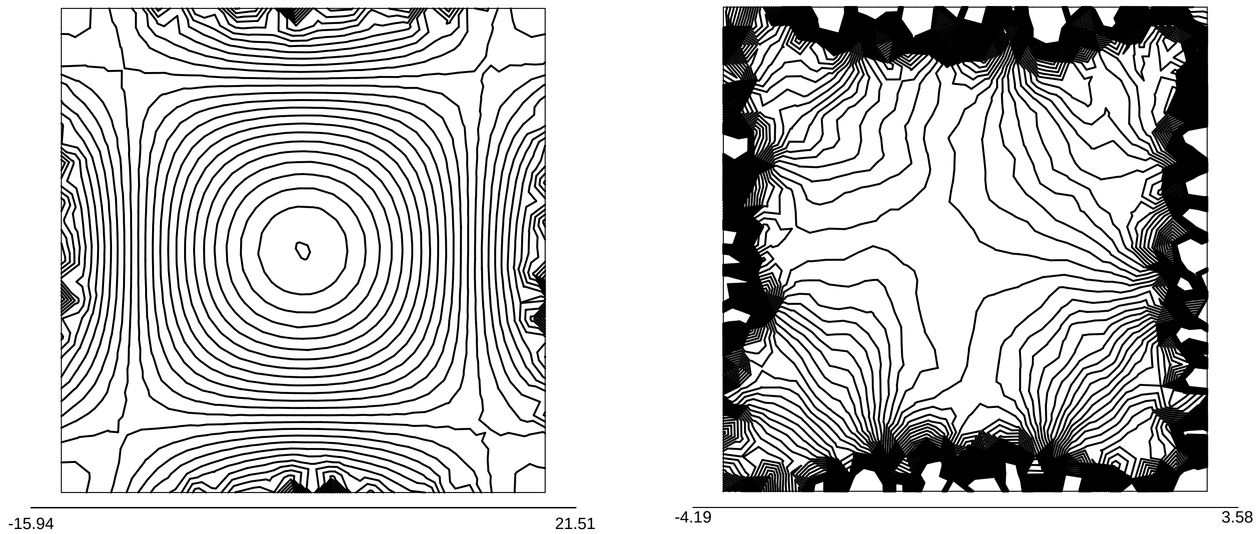


Fig. 2.34 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré de référence ($\varepsilon = 10^{-4}$).

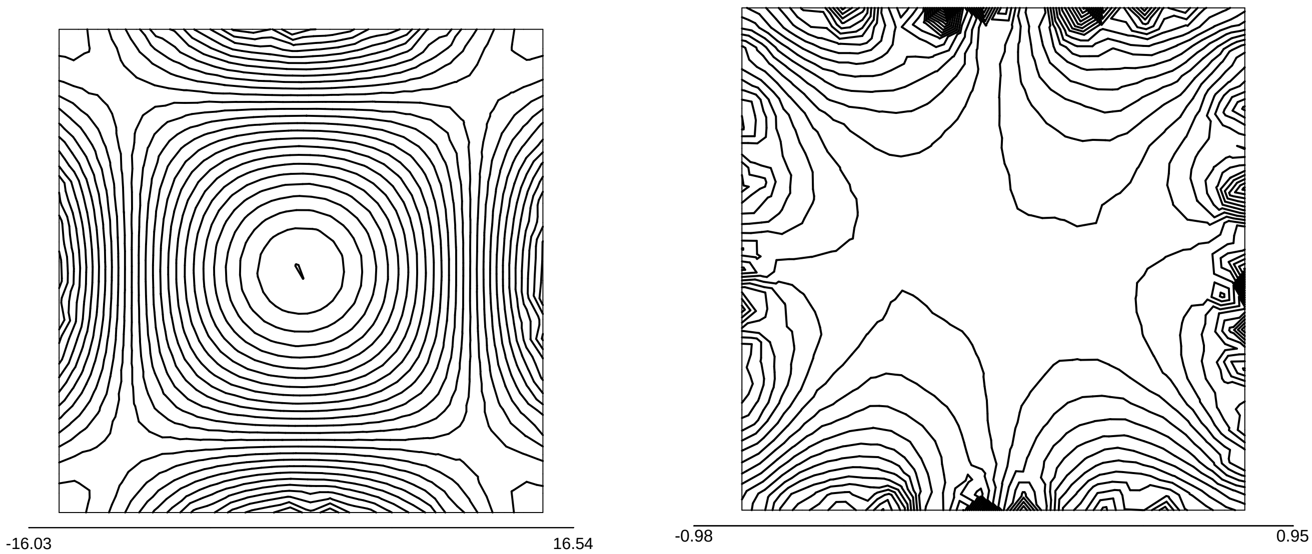


Fig. 2.35 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré de référence ($\varepsilon = 10^{-3}$).

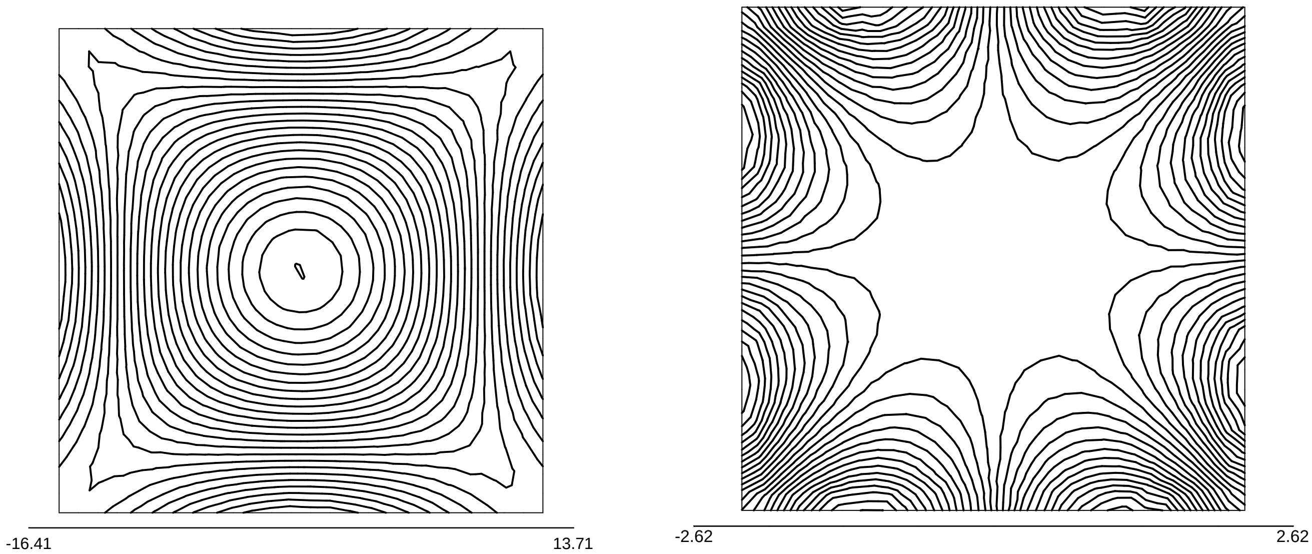


Fig. 2.36 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré de référence ($\varepsilon = 10^{-2}$).

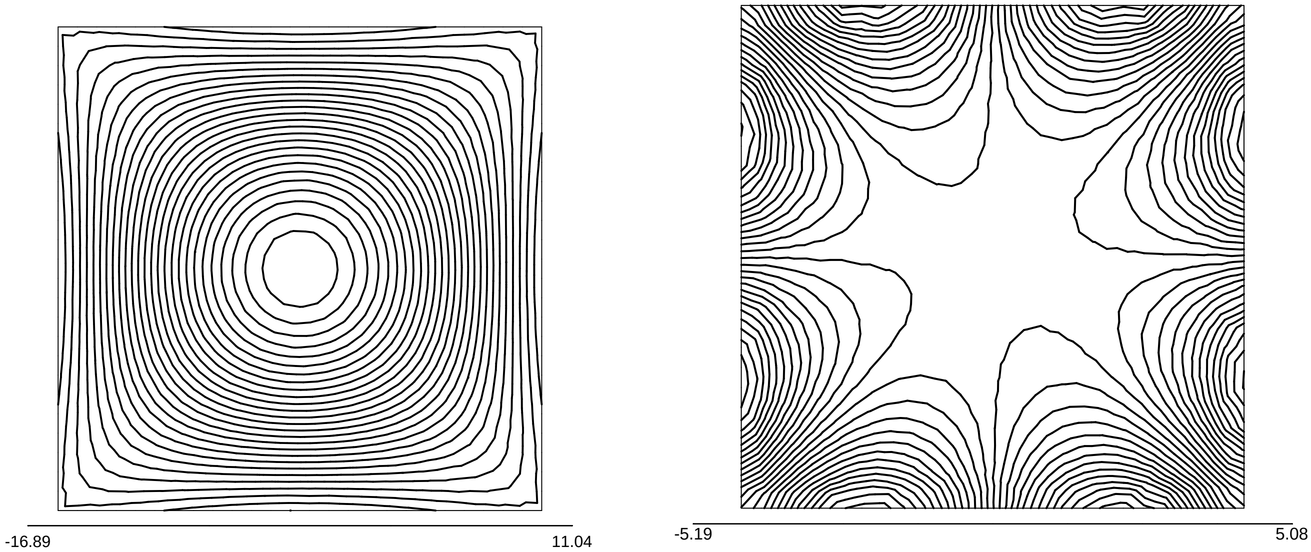


Fig. 2.37 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré de référence ($\varepsilon = 10^{-1}$).

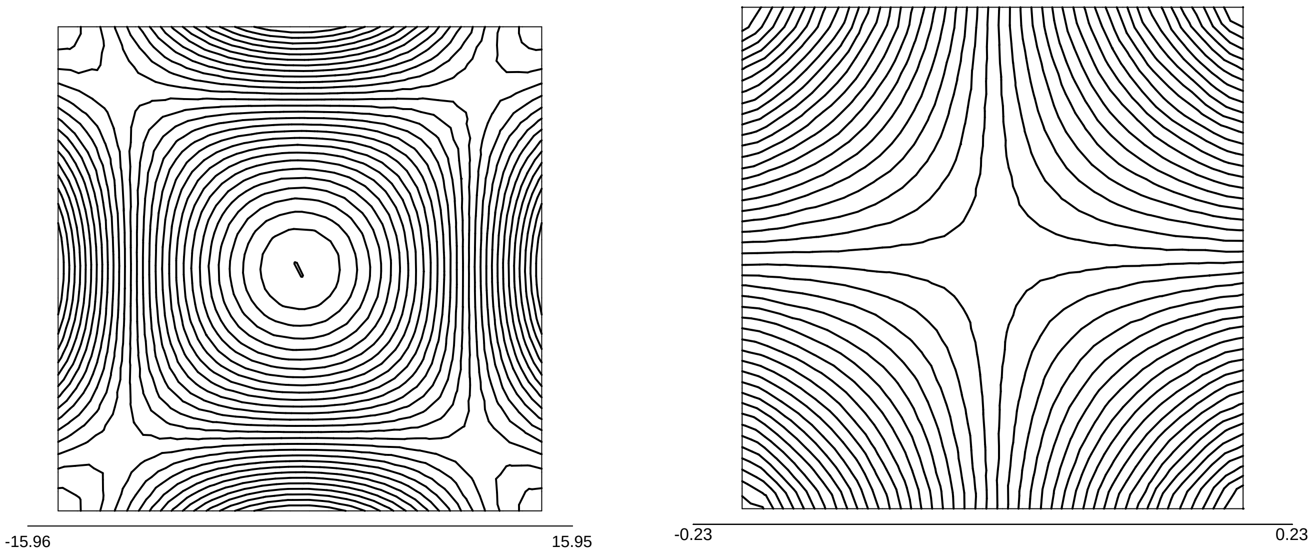


Fig. 2.38 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression exacts interpolés sur le maillage non structuré de référence 2.7.

ε	Erreur relative Tourbillon	Erreur relative Vitesse	Erreur relative Pression
0	$8,72.10^{-2}$	$7,51.10^{-2}$	$8,01$
10^{-5}	$8,03.10^{-2}$	$7,50.10^{-2}$	$7,36$
10^{-4}	$4,81.10^{-2}$	$7,44.10^{-2}$	$4,34$
10^{-3}	$2,96.10^{-2}$	$9,90.10^{-2}$	$1,83$
10^{-2}	$0,16$	$0,64$	$10,12$
10^{-1}	$0,33$	$5,96$	$20,91$

Tab. 2.1 – *Evolution de l'erreur en norme L^2 des trois champs en fonction de la valeur de ε.*

Chapitre 3

Lien entre la formulation tourbillon-vitesse-pression et la formulation fonction courant-tourbillon

Le problème de stabilité mis en évidence théoriquement et numériquement au chapitre 2 a déjà été rencontré et étudié en formulation (ψ, ω). Nous cherchons dans ce chapitre à faire le lien entre la formulation classique en (ψ, ω) et la formulation $(\omega, \mathbf{u}, p)$.
On se place dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ borné et dans ce chapitre, on suppose de plus Ω **simplement connexe** à frontière lipschitzienne.

3.1 Problèmes continus

On revient au problème de Stokes en variables primales avec une condition limite homogène sur la vitesse et un second membre $\mathbf{f}$ dans $(L^2(\Omega))^2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Soit $(\mathbf{u}, p)$ la solution de ce problème. Comme $\mathbf{u}$ est à divergence nulle et nul sur le bord du domaine que l'on a supposé connexe, on sait qu'il peut s'écrire comme le rotationnel d'une fonction courant notée ψ qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ [GR86] soit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \psi \text{ dans } \Omega.$$

La condition limite $\mathbf{u} = 0$ sur Γ se traduit sur la fonction courant par les conditions limites suivantes :

$$\psi = 0 \text{ sur } \Gamma, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{3.3}$$

On introduit ensuite la vorticité (ou tourbillon) de $\mathbf{u}$:

$$\omega = \text{rot } \mathbf{u} \text{ dans } \Omega,$$

d'où $\omega = \text{rot } \mathbf{rot}\ \psi = -\Delta\psi$. Comme $-\Delta\mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \text{rot } \mathbf{u} - \nabla(\mathbf{div})\ \mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \omega$ car $\mathbf{u}$ est à divergence nulle, l'équation du mouvement s'écrit donc $\nu\ \mathbf{rot}\ \omega + \nabla p = \mathbf{f}$. On en prend alors le rotationnel, ce qui donne :

$$-\nu\Delta\omega = \text{rot } \mathbf{f}. \tag{3.4}$$

$$\omega = -\Delta\psi. \tag{3.5}$$

On obtient la formulation variationnelle en fonction courant-tourbillon classique en multipliant l'équation (3.4) par une fonction scalaire $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et la deuxième (3.5) par une fonction $\mu \in H^1(\Omega)$, ce qui donne (voir aussi par exemple [GR86]) :

Chercher un couple $\psi \in H_0^1(\Omega)$ et $\omega \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall\varphi \in H_0^1(\Omega)\ ,\ \nu(\nabla\omega, \nabla\varphi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \varphi) = (\text{rot } \mathbf{f}, \varphi), \tag{3.6}$$

$$\forall\mu \in H^1(\Omega)\ ,\ (\nabla\psi, \nabla\mu) = (\omega, \mu). \tag{3.7}$$

Les intégrations par parties prennent en compte les conditions limites sur ψ.

Revenons à la formulation tourbillon-vitesse-pression dans le cas qui nous intéresse ici, c'est-à-dire vitesse nulle sur tout le bord du domaine. Les conditions aux limites sont alors les suivantes on cherche $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}, \Omega)$, soit $\Gamma_n = \Gamma$, et $\gamma_t.\mathbf{u} = 0$ sur $\Gamma_t = \Gamma$.

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega, \varphi) - (\mathbf{rot}\ \varphi, \mathbf{u}) & = & 0 & \forall\ \varphi \in H^1(\Omega) \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v}) - (p, \text{div } \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall\ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega) \\ (\text{div } \mathbf{u}, q) & = & 0 & \forall\ q \in L_0^2(\Omega). \end{array}\right.$$

Pour les champs de vitesse $\mathbf{v}$ qui sont à la fois à divergence nulle et nuls sur tout le bord, on a l'existence de $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tel que tout $\mathbf{v}$ s'écrive $\mathbf{rot}\ \varphi$ et la solution $\mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \psi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ (car le domaine est connexe [GR86] ou condition inf-sup tourbillon-vitesse (2.3)).
Remplaçons $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ par ces expressions dans les équations 1 et 2 ci-dessus :

$$(\omega, \mu) - (\mathbf{rot}\ \psi, \mathbf{rot}\ \mu) = 0 \quad \forall\mu \in H^1(\Omega)$$

$$\nu\ (\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{rot}\ \varphi) - (p, \underbrace{\text{div } \mathbf{rot}\ \varphi}_{=0}) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \varphi) \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega),$$

soit $\nu\ (\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{rot}\ \varphi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \varphi) \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Comme en deux dimensions, le rotationnel n'est autre que le gradient « tourné de $\frac{\Pi}{2}$ », $(\mathbf{rot}\ \bullet, \mathbf{rot}\ \bullet)$ et $(\nabla\bullet, \nabla\bullet)$ sont égales et on retrouve les équations (3.6-3.7) de la formulation fonction courant-tourbillon. La formulation tourbillon-vitesse-pression contient donc la formulation fonction courant-tourbillon dans le cas étudié ici de conditions limites homogènes. On vient de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1.1 *Equivalence entre les deux formulations continues.*
Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne et soit $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$. Pour une condition limite de vitesse nulle sur tout le bord du domaine, la solution $(\omega, \mathbf{u})$ de la formulation tourbillon-vitesse-pression coïncide avec la solution $(\omega, \mathbf{rot}\ \psi)$ de la formulation fonction courant-tourbillon.

3.2 Problèmes discrets

Le lien qui existe entre les deux formulations continues se retrouve dans les formulations discrètes. On considère $\mathcal{T}$ une triangulation du domaine Ω. La formulation variationnelle en (ψ, ω) est classiquement discrétisée avec des polynômes de degré 1, pour approcher les fonctions de $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace noté $W_\mathcal{T}$ dans le chapitre précédent. On notera $W_{0,\mathcal{T}} = W_\mathcal{T} \cap H_0^1(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur le domaine, de degré 1 par triangle et nulles sur le bord du domaine.

Formulation variationnelle discrète en (ψ, ω)
Chercher $\psi_\mathcal{T} \in W_{0,\mathcal{T}}$ et $\omega_\mathcal{T} \in W_\mathcal{T}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\nabla\psi_\mathcal{T}, \nabla\mu) & = & (\omega_\mathcal{T}, \mu) & \forall \mu \in W_\mathcal{T} \\ \nu\ (\nabla\omega_\mathcal{T}, \nabla\varphi) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \varphi) & \forall \varphi \in W_{0,\mathcal{T}}. \end{array} \right. \tag{3.8}$$

Or, toute fonction de $X_\mathcal{T}$ à divergence nulle (on sait qu'elle est alors constante par triangle) s'écrit comme le rotationnel d'une fonction de $W_\mathcal{T}$ (c'est-à-dire comme le rotationnel d'une fonction $\mathbb{P}^1$ par triangle - voir la démonstration de la condition (2.3) au chapitre 2). Comme de plus la vitesse est nulle sur le bord du domaine, la fonction de $W_\mathcal{T}$ peut aussi être prise nulle sur le bord soit :

$$\forall\ \mathbf{v} \in V_\mathcal{T} = X_\mathcal{T} \cap \mathrm{Ker}\ (\mathrm{div})\ ,\ \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\ ,\ \exists\ \varphi \in W_{0,\mathcal{T}}\ /\ \mathbf{v} = \mathbf{rot}\ \varphi.$$

Notons $\psi_\mathcal{T}$, la fonction telle que $\mathbf{u}_\mathcal{T} = \mathbf{rot}\ \psi_\mathcal{T}$. Le problème discret (2.1) s'écrit alors en remplaçant $\mathbf{u}_\mathcal{T}$ et $\mathbf{v}_\mathcal{T}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\omega_\mathcal{T}, \mu) - (\mathbf{rot}\ \psi_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \mu) & = & 0 & \forall \mu \in W_\mathcal{T} \\ \nu\ (\mathbf{rot}\ \omega_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \varphi) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \varphi) & \forall \varphi \in W_{0,\mathcal{T}}. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Les deux formulations discrètes (3.8) et (3.9) sont bien les mêmes (toujours dans le cas de condition limite homogène).

Proposition 3.2.1 *Equivalence entre les deux formulations discrètes.*
Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne, soit $\mathcal{T}$ une triangulation régulière de Ω et soit $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$. Pour une condition limite de vitesse nulle sur tout le bord du domaine, la solution $(\omega_\mathcal{T}, \mathbf{u}_\mathcal{T})$ de la formulation tourbillon-vitesse-pression discrète coïncide avec la solution $(\omega_\mathcal{T}, \mathbf{rot}\ \psi_\mathcal{T})$ de la formulation fonction courant-tourbillon discrète.

Cette équivalence présente un inconvénient majeur et deux avantages :

- le problème d'instabilité du (ψ, ω) est une difficulté qui s'oppose au succès de la formulation discrète $(\omega, \mathbf{u}, p)$,
- mais ce problème de stabilité mis en évidence au chapitre 2 est connu depuis longtemps en (ψ, ω), et n'est donc pas lié à la nouvelle formulation. Tout travail antérieur sur ce problème de non stabilité est donc utilisable pour la formulation $(\omega, \mathbf{u}, p)$.
- il est possible maintenant de travailler sur la formulation (ψ, ω) qui n'a que deux inconnues dont une seule est mal calculée en discret (le tourbillon) et d'adapter les résultats obtenus à la nouvelle formulation tourbillon-vitesse-pression.

On compare alors le tourbillon obtenu par deux logiciels, l'un en tourbillon-vitesse-pression (« OMEGA ») et l'autre en fonction courant-tourbillon (« PSIOM »). Le rotationnel de la fonction courant du (ψ, ω) et la vitesse du $(\omega, \mathbf{u}, p)$ sont aussi comparables car la fonction courant est de degré 1 par triangle donc de rotationnel constant par triangle c'est-à-dire comparable à une vitesse de Raviart-Thomas à divergence nulle. Les résultats de la comparaison sur un même maillage donnent bien ce que l'on attendait c'est-à-dire :

- les valeurs du tourbillon aux sommets sont égales à 10^{-10} près.
- les deux composantes de la vitesse sont elles aussi égales à 10^{-10} près, triangle par triangle.

En fait, les premiers essais de comparaison ne nous satisfaisaient pas car les résultats n'étaient proches qu'à 10^{-3} près. Pour obtenir une comparaison à 10^{-10} près, il s'est avéré qu'il fallait avoir **exactement** le même calcul pour le second membre et les matrices élémentaires communes : en effet, les calculs étaient faits dans une version préliminaire avec un nombre de points de Gauss différents pour l'intégrale du second membre.
Les figures 3.2, 3.3, 3.4 présentent à nouveau le cas test de Bercovier-Engelman sur le maillage non structuré de référence (figure 2.7), résultats obtenus cette fois avec le code « PSIOM » en formulation fonction courant-tourbillon. On peut comparer sur la courbe 3.6 les valeurs du tourbillon calculé par les deux logiciels sur les quatre arêtes du carré, et noter qu'elles coïncident exactement ainsi qu'annoncé à la proposition (3.2.1). On pourra aussi comparer la décomposition d'erreur faite en annexe A sur les deux formulations. La pression est obtenue par post-traitement, voir pour cela l'annexe en fin de chapitre. La fonction courant exacte qui vaut dans ce cas :

$$\psi(x, y) = -128(y^2(y-1)^2x^2(x-1)^2),$$

est visualisée interpolée toujours sur le maillage de référence en figure 3.1.

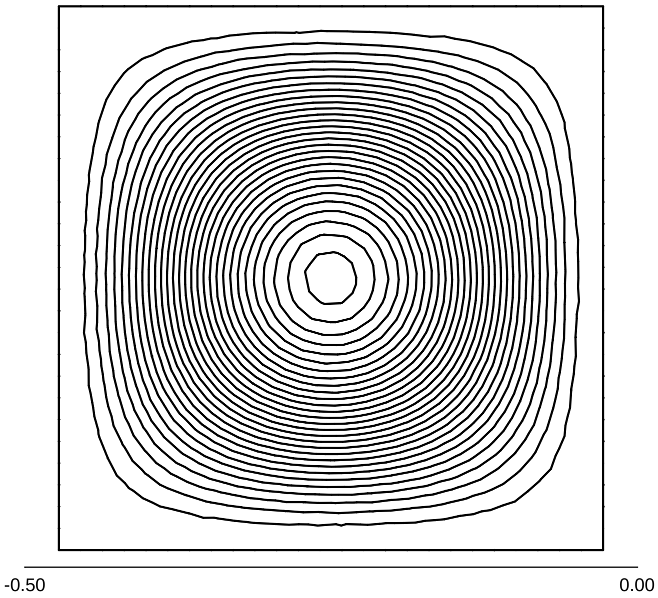


Fig. 3.1 – La fonction courant exacte interpolée sur le maillage référence 2.7.

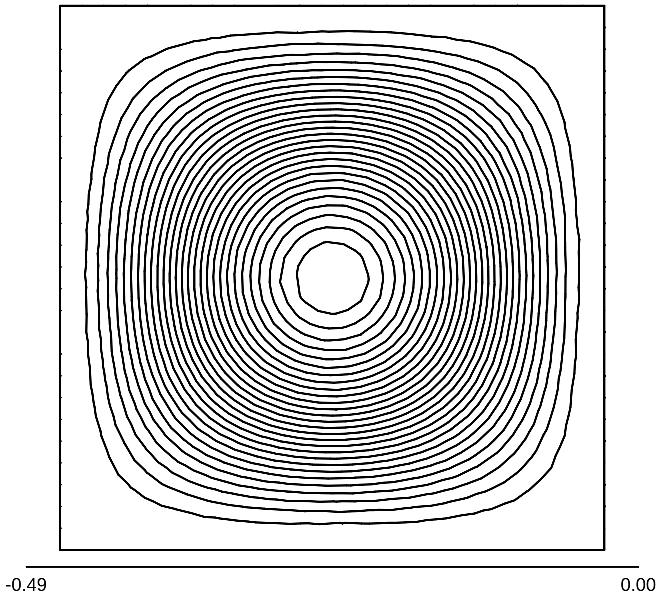


Fig. 3.2 – Isovaleurs de la fonction courant sur le maillage non structuré de référence.

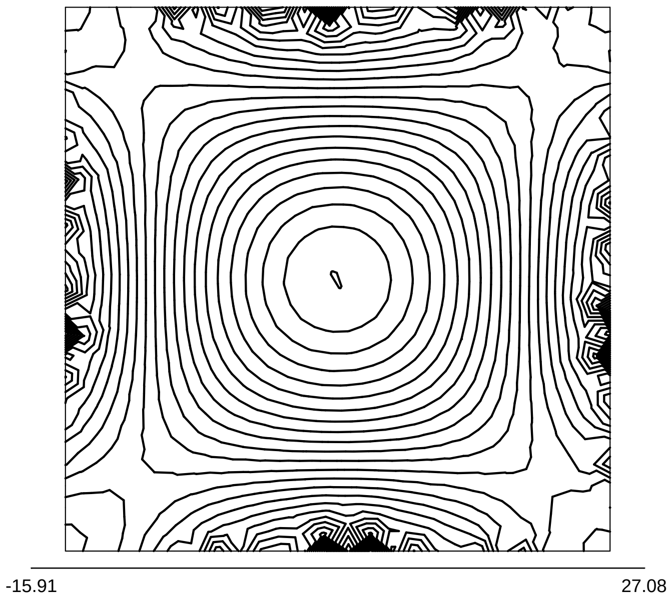


Fig. 3.3 – Isovaleurs du tourbillon sur le maillage non structuré de référence.

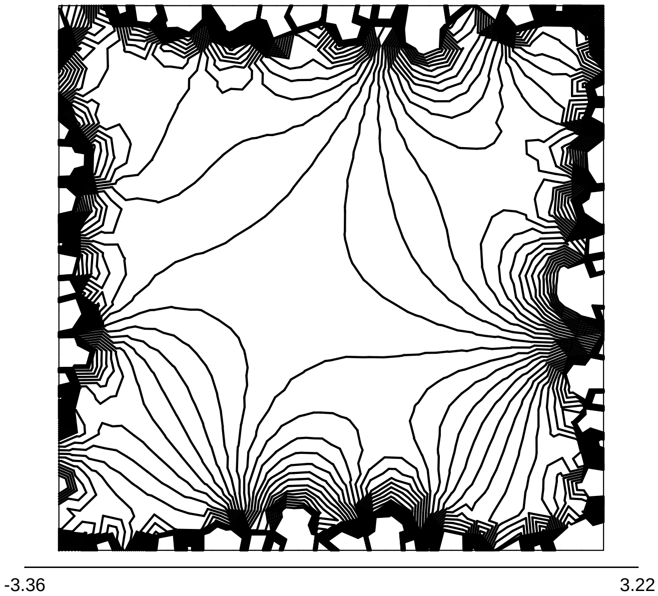


Fig. 3.4 – Isovaleurs de pression sur le maillage non structuré de référence.

Enfin, on donne la courbe de convergence obtenue sur des maillages non structurés et non emboîtés. La norme L^2 de l'erreur sur la fonction courant converge en $h_{\mathcal{T}}^{1+\eta}$, η positif, la norme L^2 de l'erreur sur le tourbillon converge en $h_{\mathcal{T}}^{1/2-\varepsilon}$, ε positif alors que la théorie donne une convergence en $h_{\mathcal{T}}^{1/2}$ pour le tourbillon ([Sch78], [GR86]).

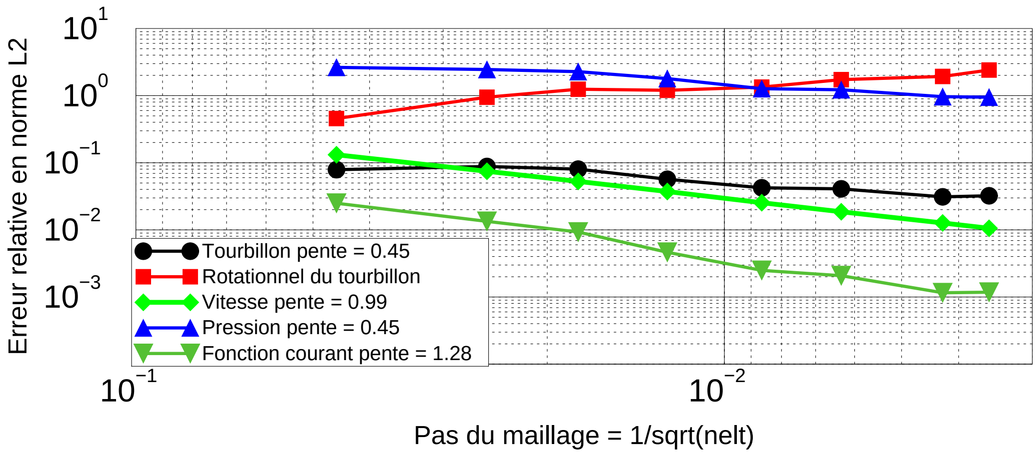


Fig. 3.5 – *Ordre de convergence - maillages non structurés - cas test de Bercovier-Engelman.*

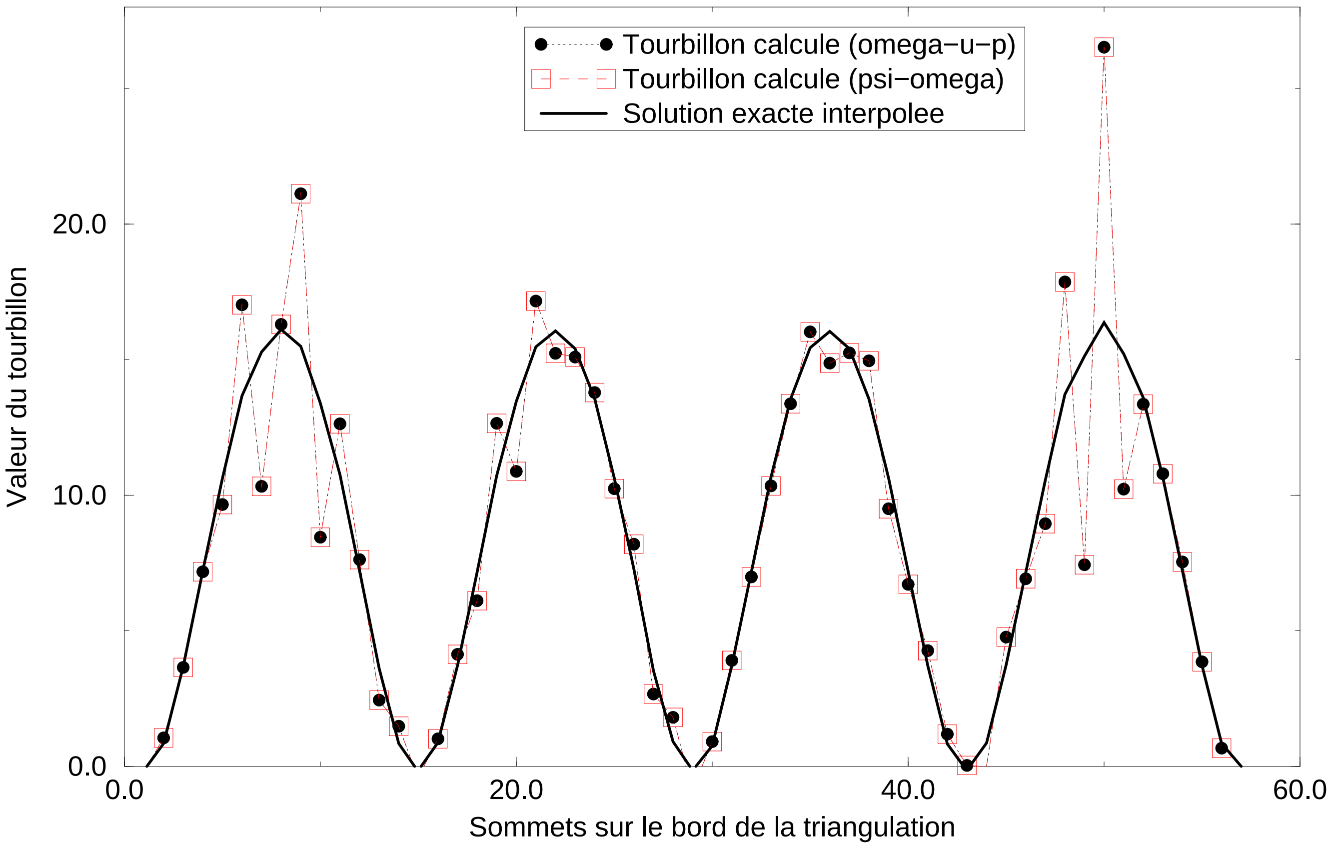


Fig. 3.6 – *Valeur du tourbillon sur le bord du domaine - formulation* $(\psi - \omega)$.

3.3 Un nouvel espace pour le tourbillon

Le problème rencontré au chapitre précédent est bien connu en formulation fonction courant-tourbillon (voir par exemple [Gir96]). En effet, il est facile de voir que (3.6-3.7) est mal posé.

$$\forall \mu \in H^1(\Omega) \ , \ (\nabla \psi, \nabla \mu) = (\omega, \mu),$$

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \ , \ \nu(\nabla \omega, \nabla \varphi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \varphi) = (\mathrm{rot}\ \mathbf{f}, \varphi).$$

On peut vérifier que toute solution du problème (3.6-3.7) est solution du problème de Stokes mais l'inverse n'est pas vrai. Car même si $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, le tourbillon n'a aucune raison d'être dans $H^1(\Omega)$, il est en général moins régulier. De plus, si l'on cherche à démontrer une stabilité du schéma comme il est fait pour la formulation $(\omega, \mathbf{u}, p)$ dans le chapitre précédent, on ne peut pas contrôler l'énergie du tourbillon. En effet, pour cela il faudrait pouvoir prendre $\varphi = \omega$ dans la deuxième équation mais ce n'est pas possible car ω ne vérifie pas les conditions limites adéquates. Le rotationnel (ou le gradient) de ω n'est donc pas borné dans $L^2(\Omega)$, exactement comme dans la formulation $(\omega, \mathbf{u}, p)$.

Il existe cependant une formulation bien posée du problème de Stokes. Pour cela, il faut utiliser l'espace $M(\Omega)$ suivant, introduit par Bernardi-Girault-Maday [BGM92] :

$$M(\Omega) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega), \Delta\varphi \in H^{-1}(\Omega)\right\}.$$

Dans la suite, on reprend les arguments de Bernardi-Girault-Maday [BGM92] conduisant à une formulation bien posée du problème de Stokes en (ψ, ω).

Remarque 3.3.1 *$M(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\| \varphi \|_M = \sqrt{\| \varphi \|^2_{0,\Omega} + \| \Delta\varphi \|^2_{-1,\Omega}}$.*

Proposition 3.3.2 *$H^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $M(\Omega)$. On a donc, $\| \varphi \|_M \leq \| \varphi \|_{1,\Omega}$ pour toute fonction φ dans $H^1(\Omega)$. De plus, si $\varphi \in M(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, sa norme M est équivalente à sa norme H^1.*

<u>Preuve</u>
Pour démontrer cette continuité, il suffit d'écrire la définition de la norme H^{-1} pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega} &= \sup_{\chi \in H^1_0(\Omega)} \frac{< \Delta\varphi, \chi >_{-1,1}}{|\chi|_{1,\Omega}} \\
&= \sup_{\chi \in H^1_0(\Omega)} \frac{-(\nabla\varphi, \nabla\chi)}{\| \nabla\chi \|_{0,\Omega}} \text{ car } \varphi \text{ est dans } H^1(\Omega) \text{ et } \chi_{|\Gamma} = 0 \\
&\leq \| \nabla\varphi \|_{0,\Omega} \quad \text{(par Cauchy-Schwarz).}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall\varphi \in H^1(\Omega) \quad \| \varphi \|_M \leq \| \varphi \|_{1,\Omega} . \tag{3.10}$$

Pour l'équivalence de norme dans le cas $H^1_0(\Omega)$, il suffit de remarquer que l'on peut prendre $\chi = \varphi$ dans le sup. ■

Proposition 3.3.3 *Trace dans $M(\Omega)$.*
Il existe un opérateur trace (toujours noté γ) de $M(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

<u>Preuve</u>
Pour toutes fonctions suffisamment régulières φ et ψ, on a la formule d'intégration par parties suivante :

$$< \Delta\varphi, \psi > - < \Delta\psi, \varphi > = < \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}, \varphi >_\Gamma - < \psi, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} >_\Gamma .$$

Soit $\varphi \in M(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, on définit $\psi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ comme la solution variationnelle du problème de bilaplacien :

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta^2\psi &= 0 && \text{dans } \Omega \\
\psi &= 0 && \text{sur } \Gamma \\
\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} &= g && \text{sur } \Gamma,
\end{aligned}\right. \tag{3.11}$$

puis $\gamma\varphi$ par la formule :

$$< \gamma\varphi, g >=< \Delta\varphi, \psi >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \Delta\psi\, \varphi\, \mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

La définition (3.12) ne dépend que de g, *ie* $g \equiv 0 \Longrightarrow \gamma\varphi = 0$. En effet, comme la solution ψ de (3.11) est unique, $g \equiv 0$ entraîne $\psi = 0$ donc $\gamma\varphi = 0$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.
La fonction ψ vérifie l'inégalité :

$$\| \psi \|_{2,\Omega} \leq C \ \| g \|_{1/2,\Gamma}, \tag{3.13}$$

donc par Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} | < \gamma\varphi, g > | \ &\leq \ \| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega} \| \psi \|_{1,\Omega} + \| \Delta\psi \|_{0,\Omega} \| \varphi \|_{0,\Omega} \\ &\leq \ C \ \| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega} \| g \|_{1/2,\Gamma} + C \ \| g \|_{1/2,\Gamma} \| \varphi \|_{0,\Omega} \quad \text{par (3.13)} \\ &\leq \ C \ \| g \|_{1/2,\Gamma} \| \varphi \|_M . \end{aligned}$$

Donc comme g décrit tout $H^{1/2}(\Gamma)$ et que $\gamma\varphi$ est linéaire continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\gamma\varphi$ appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$.

$$\| \gamma\varphi \|_{-1/2,\Gamma} \leq C \, \| \varphi \|_M .$$

Dans le cas régulier, cette notion de trace généralise bien la notion classique. ■

Remarque 3.3.4 *La trace dans $M(\Omega)$ définie dans la proposition précédente n'est pas une application surjective* a priori.

La nouvelle formulation variationnelle est désormais obtenue en testant l'équation (3.4) contre des fonctions φ de $M(\Omega)$ et la deuxième (3.5) avec des fonctions $\xi \in H_0^1(\Omega)$. Il faut intégrer deux fois par parties le terme $< \Delta\psi, \varphi >_{-1,1}$ pour prendre en compte les conditions limites (3.2-3.3). Le couple (ω, ψ) appartenant à $M(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ sont tels que

$$\left\{ \begin{array}{lll} (\omega, \varphi) + < \Delta\varphi, \psi >_{-1,1} & = \ 0 & \forall \varphi \in M(\Omega) \\ < -\Delta\omega, \xi >_{-1,1} & = \ (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) & \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.14}$$

On rappelle ici la démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution à ce problème. On se réfère à [LU68], [Bab71], [Bre74] pour l'étude des problèmes mixtes. On introduit $\mathcal{H}(\Omega)$, le noyau de la forme bilinéaire $< \Delta., . >_{-1,1}$,

$$\mathcal{H}(\Omega) = \left\{ \varphi \in M(\Omega), < \Delta\varphi, \xi >_{-1,1} = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Proposition 3.3.5 *Caractérisation de $\mathcal{H}(\Omega)$.*

$$\mathcal{H}(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \ , \ \Delta\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \right\}.$$

Preuve
Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $< -\Delta\varphi, \xi >_{-1,1} = 0$ pour toute fonction régulière ξ dans $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, *i.e* $\Delta\varphi = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Réciproquement, si $\Delta\varphi = 0$ au sens des distributions, alors $\Delta\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, $< \Delta\varphi, \xi >= 0$ pour tout ξ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, et par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, $< \Delta\varphi, \xi >= 0$ pour tout ξ dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui signifie bien que le laplacien de φ est nul dans $H^{-1}(\Omega)$. ■

La première équation de (3.14) restreinte aux fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ donne un problème bien posé (théorème de Lax-Milgram [LM54]). En effet,

Proposition 3.3.6 *La forme bilinéaire $(\omega, \varphi) \longmapsto \int_\Omega \omega\varphi\, \mathrm{d}x$ est elliptique sur $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Preuve
Il est évident que pour ω dans $\mathcal{H}(\Omega)$, $\|\omega\|_M^2 = \|\omega\|_{0,\Omega}^2$. ■

Proposition 3.3.7 *Décomposition de $M(\Omega)$.*

$$M(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}(\Omega).$$

Preuve
Soit $\varphi \in M(\Omega)$. On définit φ^0 par :

$$\begin{cases} \Delta\varphi^0 &= \Delta\varphi \quad \text{dans } \Omega \\ \gamma\varphi^0 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Et comme $\Delta\varphi$ appartient à $H^{-1}(\Omega)$, φ^0 est défini de façon unique dans $H_0^1(\Omega)$. Notons $\varphi^\Delta = \varphi - \varphi^0$. La fonction φ^Δ vérifie :

$$\Delta\varphi^\Delta = 0 \qquad \text{dans } \Omega,$$

donc φ^Δ appartient à $\mathcal{H}(\Omega)$ et est tel que

$$\gamma\varphi^\Delta = \gamma\varphi \quad \text{sur } \Gamma,$$

car $\gamma\varphi$ est bien défini dans l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$, voir la proposition (3.3.3) et par construction $\varphi = \varphi^0 + \varphi^\Delta$. Enfin $H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega) = \{0\}$. ■

Proposition 3.3.8 *Existence et unicité d'une solution au problème (3.14).*
Si $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, le problème (3.14) a une unique solution $(\psi, \omega) \in H_0^1(\Omega) \times M(\Omega)$ qui dépend continûment de la donnée $\mathbf{f}$:

$$\exists\, C > 0, \;\; \|\omega_{\mathcal{T}}\|_M + \|\nabla\psi_{\mathcal{T}}\|_{0,\Omega} \leq C\, \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} . \tag{3.15}$$

preuve
On décompose les fonctions de $M(\Omega)$ comme explicité dans le théorème (3.3.7) et on réécrit le problème (3.14) avec $\omega = \omega^0 + \omega^\Delta$ et la fonction test $\varphi = \varphi^0$ ou $\varphi = \varphi^\Delta$ où ω^0 et φ^0 appartiennent à $H_0^1(\Omega)$ et $\omega^\Delta, \varphi^\Delta$ à l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \psi \in H_0^1(\Omega),\; \omega^0 \in H_0^1(\Omega),\; \omega_{\mathcal{T}}^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega), & & \\ (\omega^0, \varphi^0) + (\omega^\Delta, \varphi^0) + < \Delta\varphi^0, \psi >_{-1,1} & = 0 & \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Omega) \\ (\omega^0, \varphi^\Delta) + (\omega^\Delta, \varphi^\Delta) + < \Delta\varphi,^\Delta \psi >_{-1,1} & = 0 & \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega) \\ < -\Delta\omega^0, \xi >_{-1,1} + < -\Delta\omega^\Delta, \xi >_{-1,1} & = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\, \xi) & \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Comme les fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont harmoniques, il reste :

$$\begin{cases} \psi \in H_0^1(\Omega),\; \omega^0 \in H_0^1(\Omega),\; \omega_{\mathcal{T}}^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega), & & \\ (\omega^0, \varphi^0) + (\omega^\Delta, \varphi^0) + < \Delta\varphi^0, \psi >_{-1,1} & = 0 & \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Omega) \\ (\omega^0, \varphi^\Delta) + (\omega^\Delta, \varphi^\Delta) & = 0 & \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega) \\ < -\Delta\omega^0, \xi >_{-1,1} & = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\, \xi) & \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

La manière d'étudier et de découpler ces problèmes a été introduites par Glowinski, Pironneau [GP79], voir aussi Achdou, Glowinski, Pironneau [AGP92] et Ruas [Rua95].

- Le problème

$$< -\Delta\omega^0, \xi >_{-1,1} = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\, \xi) \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega),$$

est bien posé (théorème de Lax-Milgram et inégalité de Poincaré). Comme Ω est borné, si C_p désigne la constante de Poincaré :

$$\forall \chi \in H_0^1(\Omega) \quad \| \chi \|_{0,\Omega} \leq C_p |\chi|_{1,\Omega},$$

il existe un unique $\omega_{\mathcal{T}}^0 \in H_{0,\mathcal{T}}^1$ satisfaisant (prendre $\xi = \omega_{\mathcal{T}}^0$)

$$\| \nabla \omega^0 \|_{0,\Omega}^2 = \| \mathbf{rot}\ \omega^0 \|_{0,\Omega}^2 \leq \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \omega^0 \|_{0,\Omega} .$$

De plus, comme la norme M de ω^0 est équivalente à la norme H^1 ($\omega^0 \in H_0^1(\Omega)$, voir la proposition 3.3.2), on obtient :

$$\| \omega^0 \|_M \leq \sqrt{1 + C_p^2}\, \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} . \tag{3.16}$$

• On étudie maintenant l'équation

$$(\omega^0, \varphi^0) + (\omega^\Delta, \varphi^0) + < \Delta\varphi^0, \psi >_{-1,1} = 0 \quad \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Omega).$$

La fonction $\omega_{\mathcal{T}}^0$ est donnée par l'étape précédente et ω^Δ est aussi uniquement définie (ellipticité dans la proposition 3.3.6).

$$\underbrace{(\omega^\Delta, \varphi^\Delta)}_{\text{elliptique sur } \mathcal{H}(\Omega)} = -(\omega^0, \varphi^\Delta) \quad \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Et ω^Δ vérifie (faire $\varphi^\Delta = \omega^\Delta$) :

$$\| \omega^\Delta \|_M = \| \omega^\Delta \|_{0,\Omega} \leq \| \omega^0 \|_{0,\Omega} \leq \sqrt{1 + C_p^2}\, \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} . \tag{3.17}$$

• Finalement, l' equation

$$(\omega^0, \varphi^0) + (\omega^\Delta, \varphi^0) + < \Delta\varphi^0, \psi >_{-1,1} = 0 \quad \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Omega)$$

est formellement identique à la première étudiée, donc il existe (théorème de Lax-Milgram et ineglité de Poincaré) $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(\nabla\psi, \nabla\varphi^0) = (\omega^0, \varphi^0) + (\omega^\Delta, \varphi^0) \quad \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Omega),$$

et

$$\begin{aligned} \| \nabla\psi \|_{0,\Omega} &\leq C_p \| \omega^0 \|_{0,\Omega} + C_p \| \omega^\Delta \|_{0,\Omega} \\ \| \nabla\psi \|_{0,\Omega} &\leq C' \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} . \end{aligned} \tag{3.18}$$

En combinant (3.16),(3.17) et (3.18) on obtient (3.15). ■

Le problème de Stokes en formulation (ψ, ω) est donc bien posé sous cette forme.

Nous allons suivre une démarche analogue pour la formulation $(\omega, \mathbf{u}, p)$ dans le cas homogène $\Gamma_n = \Gamma$ et $\Gamma_t = \Gamma$ (en d'autres termes Γ_ω est vide). Comme on cherche $\mathbf{u}$ dans $X = \{\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega)\ ,\ \mathbf{v.n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} = H_0(\mathrm{div}, \Omega)$, alors ω est cherché dans l'espace :

$$\Xi = \left\{\varphi \in L^2(\Omega)\ ,\ \mathbf{rot}\ \varphi \in X'\right\},$$

ce qui est suffisant pour définir les formes bilinéaires en jeu dans la formulation. La pression p est toujours cherchée dans $Y = L^2_0(\Omega)$

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega,\varphi) - < \mathbf{u}, \mathbf{rot}\ \varphi >_{X,X'} & = & 0 & \forall\ \varphi \in\ \Xi \\ \nu\ < \mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v} >_{X',X} - (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f},\mathbf{v}) & \forall\ \mathbf{v} \in\ X \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}, q) & = & 0 & \forall\ q \in\ Y. \end{array}\right. \tag{3.19}$$

Comme la dernière équation de la formulation signifie que $\mathbf{u}$ est à divergence nulle, les espaces sont donc :

$$\mathbf{u} \text{ est cherché dans } X_{d0} = H_0(\mathrm{div},\Omega) \cap \mathrm{Ker\ div}$$

$$\omega \text{ est cherché dans } \Xi_0 = \left\{\varphi \in L^2(\Omega)\ ,\ \mathbf{rot}\ \varphi \in X'_{d0}\right\}$$

D'après le paragraphe précédent les formulations (ψ,ω) et $(\omega,\mathbf{u},p)$ sont équivalentes dans ce cas. On doit donc démontrer le théorème suivant pour vérifier la cohérence des formulations.

Théorème 3.3.9

$$M(\Omega) = \Xi_0$$

<u>Preuve</u>
On va démontrer l'inclusion dans les deux sens.
Notons d'abord que pour tout $\psi \in H^1_0(\Omega)$, $\mathbf{rot}\ \psi \in X_{d0} = H_0(\mathrm{div},\Omega) \cap \mathrm{Ker\ div}$. En effet,

$$\begin{array}{r} \mathbf{rot}\ \psi \in (L^2(\Omega))^2, \\ \mathrm{div}\ \mathbf{rot}\ \psi = 0 \text{ donc } \mathrm{div}\ \mathbf{rot}\ \psi \in L^2(\Omega), \end{array}$$

ce qui signifie que $\mathbf{rot}\ \psi \in H(\mathrm{div},\Omega)$, donc que la trace normale de $\mathbf{rot}\ \psi$ est bien définie dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et vaut

$$\mathbf{rot}\ \psi.\mathbf{n} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{t}} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ car } \psi = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Soit $\varphi \in \Xi_0$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$, $\mathbf{rot}\ \psi \in X_{d0}$ et l'on a d'une part :

$$\begin{array}{rcl} < \mathbf{rot}\ \varphi, \underbrace{\mathbf{rot}\ \psi}_{\in X_{d0} = H_0(\mathrm{div},\Omega)} >_{X'_{d0},X_{d0}} & = & < \mathrm{rot}\ \mathbf{rot}\ \varphi, \psi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\ & = & < \Delta\varphi, \psi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \end{array}$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcl} < \mathbf{rot}\ \varphi, \mathbf{rot}\ \psi > & \leq & \| \mathbf{rot}\ \varphi \|_{X'_{d0}} \| \mathbf{rot}\ \psi \|_{X_{d0}} = \| \mathbf{rot}\ \varphi \|_{X'_{d0}} \| \mathbf{rot}\ \psi \|_{0,\Omega} \\ & \leq & C_p \| \mathbf{rot}\ \varphi \|_{X'_{d0}} \| \psi \|_{1,\Omega} \end{array}$$

où C_p est la constante de l'inégalité de Poincaré. Et donc :

$$| < \Delta\varphi, \psi > | \quad \leq \quad C_p \| \mathbf{rot}\ \varphi \|_{X'_{d0}} \| \psi \|_{1,\Omega}\ .$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$, $\Delta\varphi$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $H^1_0(\Omega)$ donc est un élément de $H^{-1}(\Omega)$. On a montré que $\varphi \in M(\Omega)$ et donc que $\Xi_0 \subset M(\Omega)$.

Réciproquement, soit $\varphi \in M(\Omega)$, on sait que pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$ à divergence nulle, il existe $\chi \in H^1_0(\Omega)$ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\ \chi$ et $\mathbf{rot}\ \chi \in X_{d0}$.

$$< \Delta\varphi, \chi >_{-1,1} \quad = \quad - < \mathbf{rot}\ \varphi, \mathbf{rot}\ \chi > = - < \mathbf{rot}\ \varphi, \mathbf{v} >\ .$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} | < \Delta\varphi, \chi >_{-1,1} | &\leq \| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega} \| \chi \|_{1,\Omega} \\ &\leq C \| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \chi \|_{0,\Omega} \\ &\leq C \| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \chi \|_{X_{d0}} . \end{aligned}$$

Donc :

$$| < \mathbf{rot}\ \varphi, \mathbf{v} > | \leq C \| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega} \| \mathbf{v} \|_{X_{d0}} .$$

Ce qui démontre que **rot** φ est défini et continu sur $\mathcal{D}(\Omega) \cap \mathrm{Ker\ div}$ qui est dense dans $H_0(\mathrm{div}, \Omega) \cap \mathrm{Ker\ div} = X_{d0}$. Donc **rot** φ est un élément de X'_{d0}. On a donc $M(\Omega) \subset \Xi_0$. ∎

Dans le cas de conditions limites les plus générales possibles, la formulation s'écrit : trouver $(\omega, \mathbf{u}, p) \in \Xi \times X \times Y$ avec

$$X = \{\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega)\ ,\ \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n\}$$

$$\Xi = \left\{\varphi \in L^2(\Omega)\ ,\ \mathbf{rot}\ \varphi \in X'\ ,\ \gamma\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_\omega\right\}$$

tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega, \varphi) - (\mathbf{u}, \mathbf{rot}\ \varphi) & = & < \tau_0, \varphi >_\Gamma & \forall\ \varphi \in \Xi \\ \nu\ (\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v}) - (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - < \Pi_0, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma & \forall\ \mathbf{v} \in X \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}, q) & = & 0 & \forall\ q \in Y \end{array} \right.$$

et il faut alors définir un opérateur trace dans le nouvel espace Ξ afin que le terme de bord $< \tau_0, \varphi >_\Gamma$ ait encore un sens (travail en cours).

3.4 Lien entre le cas tri-dimensionnel et d'autres travaux

Cette section est la seule où nous aborderons le cas tri-dimensionnel. L'objectif est de comparer notre approche à celle proposée par Amara et al. dans un papier récent [ABD99]. Dans le cas homogène, les espaces fonctionnels doivent à nouveau concorder afin de garder la cohérence de l'approche tridimensionnelle.

Remarque 3.4.1 – *On se place dans l'espace :*

$$H(\mathbf{rot}, \Omega) = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega))^3\ ,\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega))^3\ \right\}.$$

– *Il existe alors un opérateur de trace (toujours noté γ_t) de $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ dans $(H^{-1/2}(\Gamma))^3$ définie par*

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\mathbf{rot}, \Omega)\ ,\ \gamma_t \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{n}.$$

– *On a ici aussi une formule de Green vraie pour toute fonction vectorielle $\boldsymbol{\varphi} \in H(\mathbf{rot}, \Omega)$ et toute fonction $\mathbf{w} \in (H^1(\Omega))^3$:*

$$\int_\Omega \mathbf{rot}\ \mathbf{w}.\boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\varphi}.\mathbf{w}\, \mathrm{d}x + < \gamma\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{n} >_\Gamma$$

La trace dans $(H^1(\Omega))^3$ est toujours notée γ.

Les espaces utilisés par Amara et al. sont les suivants :

$$X_A = \{\varphi \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \ , \ \varphi \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} \, ,$$

le tourbillon étant cherchée dans l'espace noté W_A :

$$W_A = \left\{\boldsymbol{\theta} \in (L^2(\Omega))^3 \ , \ \mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\theta} \in X'_A\right\}.$$

Pour avoir l'équivalence complète entre les deux formulations, il nous faut introduire l'espace X_{d0} suivant :

$$X_{d0} = \left\{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3 \ , \ \text{div } \mathbf{v} = 0 \ , \ \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}$$

et l'espace où doit être cherché le tourbillon devient :

$$W_{d0} = \left\{\varphi \in (L^2(\Omega))^3 \ , \ \mathbf{rot}\ \varphi \in X'_{d0}\right\}.$$

Théorème 3.4.2 *On a* $W_A \subset W_{d0}$.

<u>Preuve</u>
Commençons par noter que si $\varphi \in X_A$ alors $\mathbf{rot}\ \varphi \in X_{d0}$. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi &\in (L^2(\Omega))^3, \\ \text{div } \mathbf{rot}\ \varphi &= 0 \in L^2(\Omega), \\ \mathbf{rot}\ \varphi.\mathbf{n} &= \text{div}_{|\Gamma}(\varphi \wedge \mathbf{n}) = 0, \end{aligned}$$

où on a noté $\text{div}_{|\Gamma}$ la divergence surfacique.
Inversement si $\mathbf{v} \in X_{d0}$, comme $\mathbf{v}$ est à divergence nulle et de trace normale nulle sur le bord du domaine, on sait qu'il existe $\boldsymbol{\phi} \in (H^1(\Omega))^3$ unique tel que $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\phi}$, div $\boldsymbol{\phi} = 0$ et $\boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{n} = 0$ sur Γ [ABDG98]. Donc en fait $\boldsymbol{\phi} \in X_A$, et d'après un résultat d'Amara et al. [ABD99]

$$\exists\ C \ > \ 0 \text{ ne dépendant que de } \Omega, \ \forall \varphi \in X_A \cap \text{Ker(div)} \quad \| \mathbf{rot}\ \varphi \|_{0,\Omega} \geq C \ \ \| \varphi \|_{X_A}.$$

Soit désormais $\boldsymbol{\theta} \in W_A$, $\mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^3 \cap \text{Ker (div)}$,

$$\begin{aligned} < \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v} >_{(\mathcal{D}'(\Omega))^3,(\mathcal{D}(\Omega))^3} &= < \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\theta}, \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\phi} >_{(\mathcal{D}'(\Omega))^3,(\mathcal{D}(\Omega))^3} \\ &= < \underbrace{\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\theta}}_{\in X'_A}, \underbrace{\boldsymbol{\phi}}_{\in X_A} >_{(\mathcal{D}'(\Omega))^3,(\mathcal{D}(\Omega))^3} \end{aligned}$$

et comme

$$| < \mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi} > | \quad \leq \quad C \ \ \| \boldsymbol{\theta} \|_{W_A} \| \boldsymbol{\phi} \|_{X_A},$$

on a

$$| < \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v} > | \quad \leq \quad C \ \ \| \boldsymbol{\theta} \|_{W_A} \| \boldsymbol{\phi} \|_{X_A},$$

Or $\| \boldsymbol{\phi} \|^2_{X_A} = \| \boldsymbol{\phi} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\phi} \|^2_{0,\Omega}$ et comme div $\boldsymbol{\phi} = 0$,

$$\| \boldsymbol{\phi} \|^2_{X_A} \leq \frac{1}{C} \| \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\phi} \|_{0,\Omega} \overset{\mathbf{v}=\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\phi}}{=} \frac{1}{C} \| \mathbf{v} \|_{0,\Omega} \overset{\text{div } \mathbf{v}=0}{=} \frac{1}{C} \| \mathbf{v} \|_{X_{d0}},$$

d'où $| < \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v} > | \leq \dfrac{1}{C} \parallel \boldsymbol{\theta} \parallel_{W_A} \parallel \mathbf{v} \parallel_{X_{d0}}$ et par densité de $(\mathcal{D}(\Omega))^3 \cap$Ker (div) dans $H_0(\mathrm{div}, \Omega) \cap$ Ker (div), $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\theta}$ est une application continue sur $H_0(\mathrm{div}, \Omega) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{div})$ donc appartient à X'_{d0}.
On a donc $\boldsymbol{\theta} \in W_{d0}$, soit $W_A \subset W_{d0}$. ■

Remarque 3.4.3 *On peut se demander si l'inclusion inverse est vraie.*
Soit $\boldsymbol{\varphi} \in W_{d0}$, a-t-on $\boldsymbol{\varphi} \in W_A$? Au sens des distributions, on pose :

$$\begin{aligned} < \mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma} > &= < \underbrace{\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\varphi}}_{\in X'_{d0}}, \underbrace{\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\gamma}}_{\in X_{d0}} > \\ &\leq \parallel \boldsymbol{\varphi} \parallel_{W_{d0}} \parallel \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\gamma} \parallel_{0,\Omega} \end{aligned}$$

Or $\parallel \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\gamma} \parallel_{0,\Omega} = \parallel \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\gamma} \parallel_{X_{d0}}$ n'est équivalent à $\parallel \boldsymbol{\gamma} \parallel_{X_A}$ que si l'on rajoute l'hypothèse de divergence nulle, ce qui n'a aucune raison d'être dans notre formulation.

Post-traitement de la pression pour la formulation fonction courant-tourbillon

L'obtention de la pression lorsque l'on utilise une formulation fonction courant-tourbillon du problème de Stokes nécessite un post-traitement puisque celle-ci n'est plus dans les équations de départ. Pour cela, on reprend la deuxième équation du problème de Stokes (1.3) et on la multiplie par ∇q avec q dans $H^1(\Omega)$,

$$\nu \ \mathbf{rot}\ \omega + \nabla p \quad = \quad \mathbf{f} \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

$$\nu \ (\mathbf{rot}\ \omega, \nabla q) + (\nabla p, \nabla q) \quad = \quad (\mathbf{f}, \nabla q) \quad \forall q \in H^1(\Omega).$$

Comme le tourbillon est connu, on peut le passer au second membre et le problème en pression s'écrit : trouver p dans $H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ (la pression est définie à une constante additive près) telle que

$$(\nabla p, \nabla q) \quad = \quad (\mathbf{f} - \nu \ \mathbf{rot}\ \omega, \nabla q) \quad \forall q \in H^1(\Omega).$$

(Voir [GR86] pour plus de détails).

Le problème continu correspondant pour la pression est un problème de Neumann pour l'opérateur de Laplace. La formulation fonction courant-tourbillon correspond donc à trois problèmes de laplacien.

Les différences observées sur la pression entre la formulation tourbillon-vitesse-pression et la formulation fonction courant-tourbillon proviennent essentiellement du fait que la pression post-traitée est cherchée continue. De plus la condition de Neumann sous-jacente n'est pas présente dans la formulation tourbillon-vitesse-pression. On notera cependant que, dans les deux cas, les solutions ne sont pas acceptables.

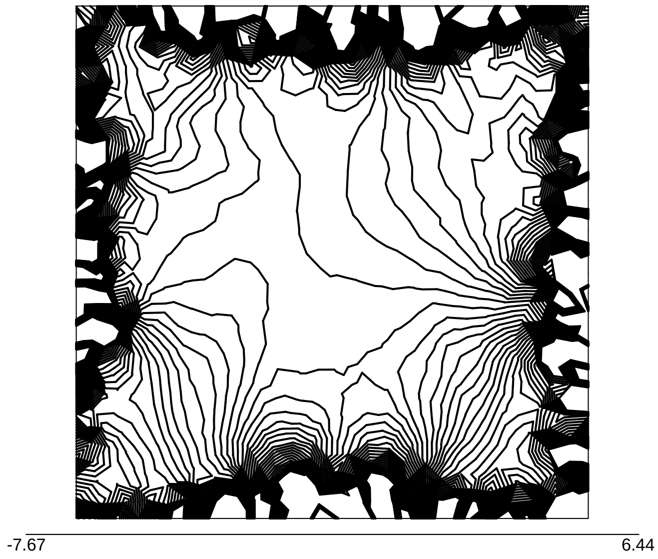


Fig. 3.7 – Isovaleurs de pression sur un maillage non structuré de référence (code $(\omega, \mathbf{u}, p)$).

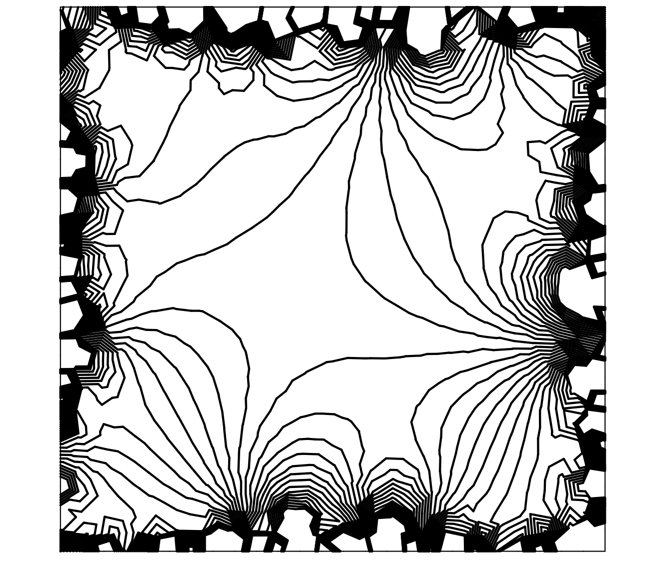


Fig. 3.8 – Isovaleurs de pression sur un maillage non structuré de référence (code (ψ, ω)).

Chapitre 4

Une stabilisation numérique du problème de Stokes en formulation tourbillon-vitesse-pression

En collaboration avec Michel Salaün.

4.1 Introduction

Rappelons que nous travaillons sur une formulation du problème de Stokes bidimensionnel prenant en compte les trois variables tourbillon, vitesse et pression de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega, \varphi) - (\mathbf{u}, \mathbf{rot}\ \varphi) & = & < \tau_0, \varphi >_\Gamma & \forall\ \varphi \in\ H^1(\Omega) \\ \nu\ (\mathbf{rot}\ \omega, \mathbf{v}) - (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - < \Pi_0, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma & \forall\ \mathbf{v} \in\ H(\mathrm{div}, \Omega) \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}, q) & = & 0 & \forall\ q \in\ L^2_{(0)}(\Omega). \end{array} \right. \tag{4.1}$$

La discrétisation de cette formulation est la suivante : on cherche le tourbillon aux sommets du maillage (polynômes $\mathbb{P}^1$), la vitesse par ses flux au travers des arêtes et la pression constante par triangle.

Mais les résultats numériques obtenus ne sont pas satisfaisants : sur des maillages non structurés, l'aspect de la solution en tourbillon et en pression est décevant. De plus, la convergence est très mauvaise : moins de $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ en norme L^2 du tourbillon et en norme L^2 de la pression. La vitesse converge elle en $\mathcal{O}(h)$. On s'attendait par l'erreur d'interpolation à $\mathcal{O}(h^2)$ pour la norme L^2 du tourbillon, $\mathcal{O}(h)$ pour la norme L^2 de la vitesse et de la pression.

L'explication de ce problème est la non stabilité du schéma : autrement dit, l'énergie du tourbillon $\| \ \mathbf{rot}\ \omega \ \|_{0,\Omega}$ n'est pas contrôlée par ce schéma (voir le chapitre 2), d'où l'idée de rajouter des fonctions en vitesse qui permettraient de contrôler cette norme.

4.2 Fonctions supplémentaires

Notre objectif est le suivant : construire un champ de vitesse dans $H(\mathrm{div}, \Omega)$, qui vérifie les conditions limites et tel que « $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\ \omega$ » en un sens qui reste à définir. On enrichit alors l'espace

$X_{\mathcal{T}}$ des vitesses par des fonctions $\mathbf{v_S}$ associées aux sommets frontières de la triangulation. Notons $NS(\mathcal{T},\Gamma)$ le nombre de sommets de la triangulation qui sont sur le bord du domaine.

Remarque 4.2.1 *En fait, les vitesses ne sont rajoutées que sur la partie $\Gamma_n \setminus \Gamma_\omega$, partie de Γ sur laquelle on impose la vitesse normale mais pas le tourbillon (voir la démonstration de la non-stabilité au chapitre 2).*

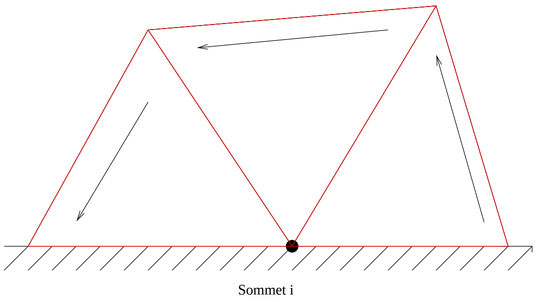


Fig. 4.1 – *Support d'une fonction rajoutée.*

La vitesse restreinte à un triangle est de la forme : $\mathbf{v_S}_{|K} = B.\mathbf{rot}\lambda_i$ où λ_i est la fonction coordonnée barycentrique associée au sommet i qui est sur le bord (voir la figure 4.1), $B = 60\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ la fonction bulle du triangle. La « fonction bulle » assure que les fonctions $\mathbf{v_S}$ sont nulles à la fois sur le bord du domaine (donc qu'elles vérifient les conditions limites) et sur toutes les arêtes des triangles (donc les flux de vitesse normale sont nuls et *a fortiori* continus, ce qui permet d'affirmer que $\mathbf{v_S}$ appartient bien à $H(\mathrm{div},\Omega)$). Le coefficient 60 devant la bulle permet d'avoir $\displaystyle\int_K B\,\mathrm{d}x = |K|$. L'espace des ces fonctions supplémentaires est noté $X^S_{\mathcal{T}}$.

Notons que ces vitesses rajoutées sont à divergence en moyenne nulle sur chaque triangle de la triangulation (car leur flux est nul sur les arêtes des triangles) mais pas à divergence nulle, on n'assure donc plus complètement la condition d'incompressibilité.

La solution du problème discret se décompose désormais en $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \mathbf{u^{RT}} + \mathbf{u_S}$ avec $\mathbf{u^{RT}} \in X_{\mathcal{T}}$ et $\mathbf{u_S} \in X^S_{\mathcal{T}}$. On a les propriétés simples suivantes.

Propriété 4.2.2 *Pour tout $q_{\mathcal{T}}$ dans $Y_{\mathcal{T}}$, et tout $\mathbf{v_S}$ dans $X^S_{\mathcal{T}}$,* $\quad (q_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) = 0.$

<u>Preuve</u>
En effet, comme $q_{\mathcal{T}}$ est constant par triangle,
$(q_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) = \displaystyle\sum_{k\in\mathcal{T}} q_{\mathcal{T}_{|K}} \int_K \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}\,\mathrm{d}x = 0$ puisque les fonctions rajoutées sont à divergence en moyenne nulle. ■

Propriété 4.2.3 *Pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \mathbf{u^{RT}} + \mathbf{u_S}$ et tout $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{v^{RT}} + \mathbf{v_S}$, on a :*

$$(\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = (\mathrm{div}\ \mathbf{u^{RT}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v^{RT}}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{u_S}, \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}). \tag{4.2}$$

<u>Preuve</u>

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &= (\mathrm{div}\ \mathbf{u^{RT}} + \mathrm{div}\ \mathbf{u_S}, \mathrm{div}\ \mathbf{v^{RT}} + \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) \\
&= (\mathrm{div}\ \mathbf{u^{RT}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v^{RT}}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{u_S}, \mathrm{div}\ \mathbf{v^{RT}}) \\
&+ (\mathrm{div}\ \mathbf{u^{RT}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) + (\mathrm{div}\ \mathbf{u_S}, \mathrm{div}\ \mathbf{v_S})
\end{aligned}$$

or $(\text{div } \mathbf{u_S}, \text{div } \mathbf{v^{RT}}) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \text{div } \mathbf{u_S} \underbrace{\text{div } \mathbf{v^{RT}}}_{\substack{\text{constant} \\ \text{par triangle}}} \, \mathrm{d}x = \sum_{K \in \mathcal{T}} \text{div } \mathbf{v^{RT}}_{|K} \underbrace{\int_K \text{div } \mathbf{u_S} \, \mathrm{d}x}_{=0}$

et de même $(\text{div } \mathbf{u^{RT}}, \text{div } \mathbf{v_S}) = 0$. Et (4.2) est établie. ■

On obtient ainsi la :

Formulation **stabilisée** en tourbillon-vitesse-pression :

$$
\begin{aligned}
(\omega_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\mathbf{u^{RT}}, \mathbf{rot}\ \varphi) - (\mathbf{u_S}, \mathbf{rot}\ \varphi) &= < \tau_0, \varphi >_\Gamma \quad \forall \varphi \in W_{\mathcal{T}} && (4.3)\\
\nu\ (\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) + (\text{div } \mathbf{u^{RT}}, \text{div } \mathbf{v}) - (p_{\mathcal{T}}, \text{div } \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - < \Pi_0, \mathbf{v}.\mathbf{n} >_\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}} && (4.4)\\
\nu\ (\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v_S}) + [\text{div } \mathbf{u_S}, \text{div } \mathbf{v_S}] &= (\mathbf{f}, \mathbf{v_S}) \quad \forall \mathbf{v_S} \in X_{\mathcal{T}}^S && (4.5)\\
(\text{div } \mathbf{u^{RT}}, q) &= 0 \quad \forall q \in Y_{\mathcal{T}} && (4.6)
\end{aligned}
$$

où $[\text{div } \mathbf{u_S}, \text{div } \mathbf{v_S}] = C \sum_{K \in \mathcal{T}} \text{mes}(K) \int_K \text{div } \mathbf{u_S}.\text{div } \mathbf{v_S} \, \mathrm{d}x$

Remarque 4.2.4

- *Comme la formulation tourbillon-vitesse-pression contient la formulation fonction courant-tourbillon (voir chapitre 3), cet ajout de fonctions pourra se faire dans cette dernière et on obtiendra une stabilisation de la formulation $(\psi - \omega)$ de la façon suivante :*
  Trouver $\omega_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}$
  et $\mathbf{rot}\ \psi_{\mathcal{T}} + \mathbf{u_S}, \psi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}, \mathbf{u_S} \in X_{\mathcal{T}}^S$ *solutions de :*

  $$
  \begin{aligned}
  (\omega_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\mathbf{rot}\ \psi_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi) - (\mathbf{u_S}, \mathbf{rot}\ \varphi) = < \tau_0, \varphi >_\Gamma \quad \forall \varphi \in W_{\mathcal{T}}\\
  \nu\ (\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \chi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \chi) \quad \forall \chi \in H^1_{0,\mathcal{T}}\\
  \nu\ (\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v_S}) + [\text{div } \mathbf{u_S}, \text{div } \mathbf{v_S}] = (\mathbf{f}, \mathbf{v_S}) \quad \forall \mathbf{v_S} \in X_{\mathcal{T}}^S.
  \end{aligned}
  $$

  Pour des résultats numériques concernant cette formulation, voir à la fin du chapitre.

- *Les fonctions rajoutées n'étant pas à divergence nulle, la présence du terme en div-div est normale puisque* $-\triangle \mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \text{rot}\ \mathbf{u} - \nabla\ \text{div}\ \mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \omega - \nabla \text{div}\ \mathbf{u_S}$
  mais, il est nécessaire de pénaliser ce terme par une constante de l'ordre de h^2 (h étant le pas caractéristique du maillage), ici matérialisé par un terme en mesure du triangle pour assurer la convergence de la méthode.

- *Enfin, le coefficient C est à discrétion pour l'instant.*

4.3 Résultats numériques

On distingue deux cas tests numériques analytiques. Le premier est le cas test de Bercovier-Engelman ([BE79]) sur le carré unité avec une pression parabolique :

$$p(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

c'est-à-dire un second membre $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ qui vaut :

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 256\left(x^2(x-1)^2(12y-6) + y(y-1)(2y-1)(12x^2-12x+2)\right) \\ &+ (y-0.5) \\ f_2(x,y) &= -f_1(y,x) \end{aligned}$$

(voir les figures 2.8, 2.9, 2.10 qui donnent la solution exacte interpolée sur un maillage de référence non structuré présenté en figure 2.7).

Dans le deuxième cas test, la pression est cherchée sinusoïdale :

$$p(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

Le second membre est alors le suivant :

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 256\left(x^2(x-1)^2(12y-6) + y(y-1)(2y-1)(12x^2-12x+2)\right) \\ &+ \pi\cos(\pi x)\sin(\pi y) \\ f_2(x,y) &= 256\left(x^2(x-1)^2(12y-6) + y(y-1)(2y-1)(12x^2-12x+2)\right) \\ &+ \pi\cos(\pi y)\sin(\pi x). \end{aligned}$$

La figure (4.2) représente la pression (2) exacte interpolée sur le maillage référence (2.7).

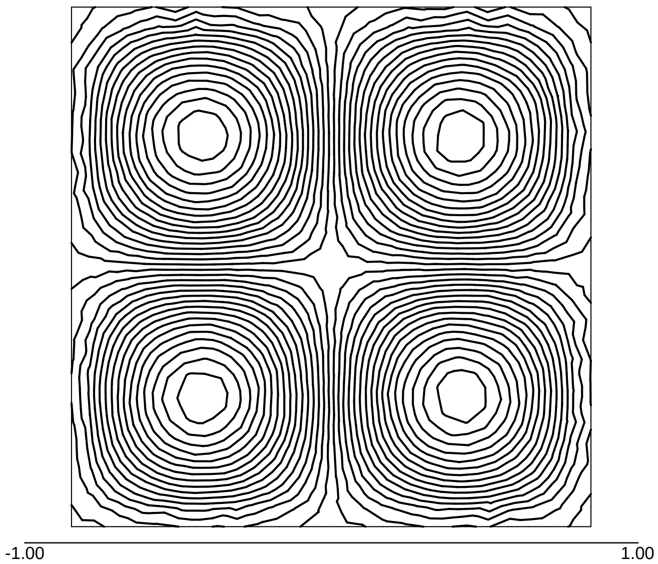


Fig. 4.2 – Isovaleurs de la pression (2) interpolée sur le maillage référence.

Seule la pression change dans les deux tests (vitesse et tourbillon solutions sont identiques). La différence essentielle entre les deux formes de la pression est le fait que la deuxième pression est constante (en l'occurence nulle) sur le bord du domaine contrairement à la première qui y varie de -0.25 à $+0.25$.

Les résultats numériques obtenus sont les suivants. Dans le premier cas, le tourbillon est satisfaisant quel que soit le maillage (voir figure 4.3). Mais celui en pression reste décevant (figure

4.7). En effet, on ne constate plus du tout d'explosion comme c'était le cas en version de base, mais les extrêmes ne sont pas atteints (ici, ± 0.15 au lieu de ± 0.25). Bien sûr, l'erreur en norme L^2 est bien meilleure que ce que l'on obtenait en version de base (voir pour cela la décomposition d'erreur en annexe A faite sur la version de base et la version stabilisée), néanmoins la norme de la pression ne diminue pas en $\mathcal{O}(h)$ comme attendu par l'erreur d'interpolation mais en $\mathcal{O}(h^{2/3})$, ce qui n'est pas suffisant. De plus, ce problème se retrouve sur la convergence du tourbillon, qui est « ralentie » par le problème en pression et qui n'atteint pas alors l'ordre 2 prévu par l'erreur d'interpolation (voir courbe 4.8). Le résultat en vitesse était et reste satisfaisant (figure 4.4). Les vitesses rajoutées au bord ont été mises à l'échelle afin d'être visibles (figure 4.5).

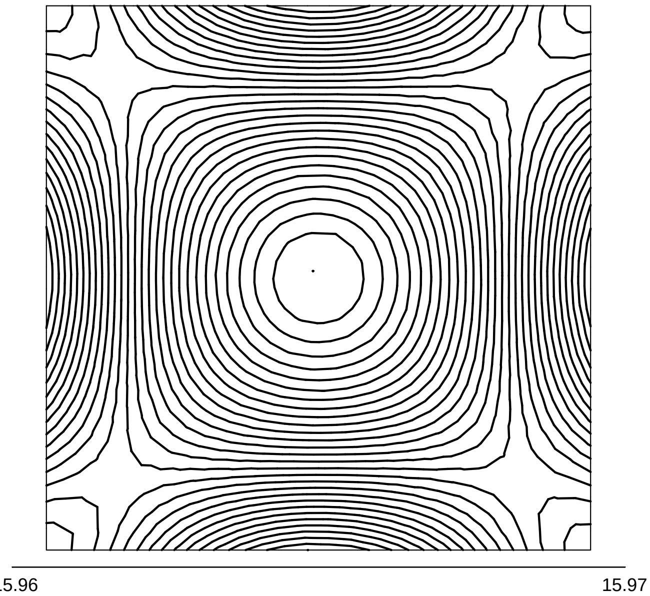


Fig. 4.3 – Isovaleurs du tourbillon sur le maillage non structuré de référence (cas test (1)).

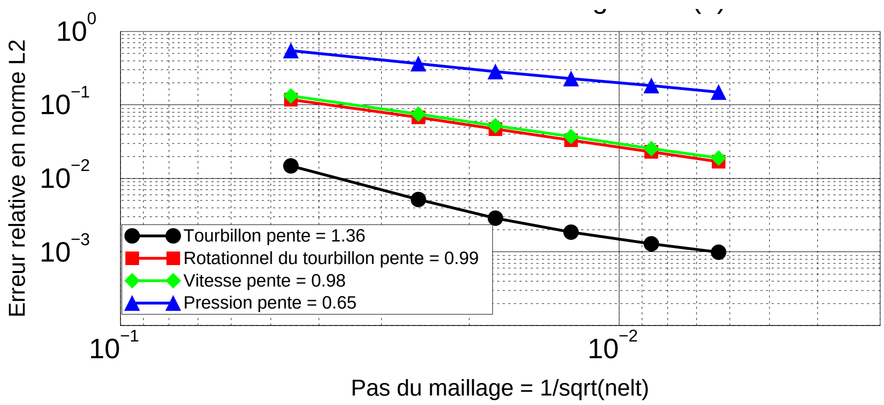


Fig. 4.8 – *Ordre de convergence (cas test de Bercovier-Engelman (1))*

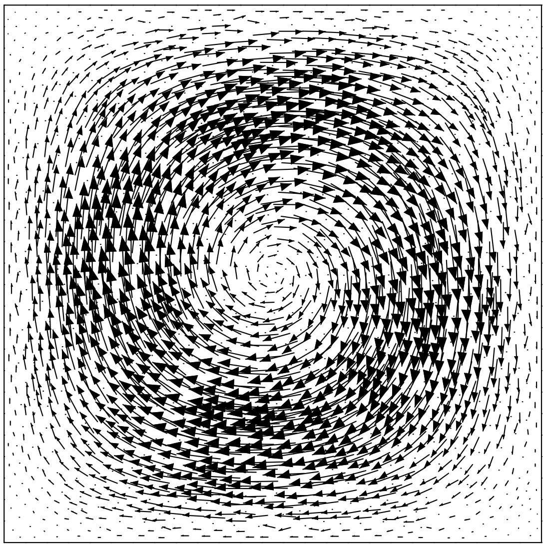


Fig. 4.4 – Vecteurs vitesse : degrés de liberté de Raviart-Thomas (cas test (1)).

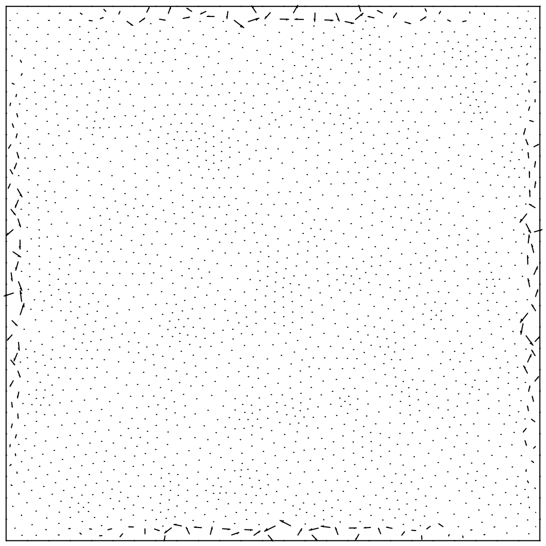


Fig. 4.5 – Vecteurs vitesse : degrés de liberté rajoutés - vitesse bulle (cas test (1)).

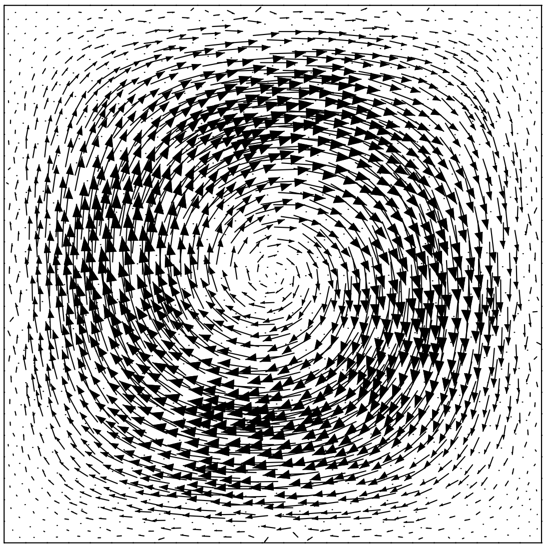


Fig. 4.6 – Vecteurs vitesse : somme des vecteurs vitesse précédents (cas test (1)).

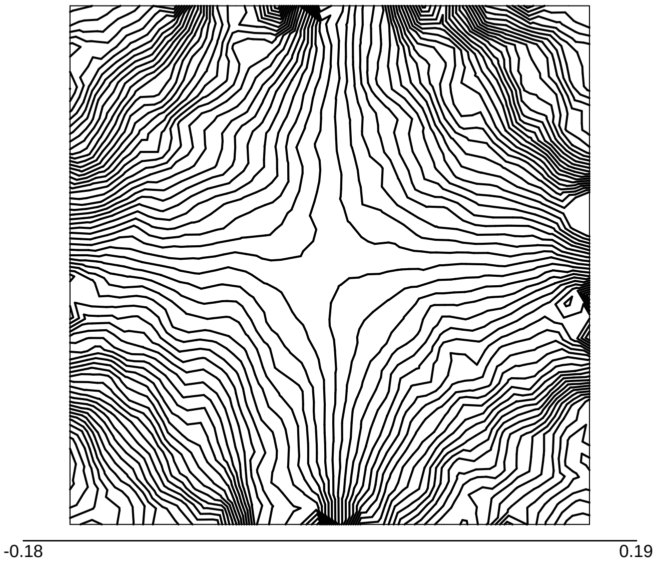


Fig. 4.7 – Isovaleurs de pression sur le maillage non structuré de référence (cas test (1)).

Dans le cas de la pression constante sur le bord du domaine, les résultats sont ceux attendus, aussi bien en pression qu'en tourbillon (figures 4.9 à 4.13). En effet, le tourbillon converge expérimentalement en $\mathcal{O}(h^2)$ et la pression en $\mathcal{O}(h)$ (voir courbe (4.14)). Dans les deux cas, la vitesse converge en $\mathcal{O}(h)$ comme dans la version de base, ainsi que le rotationnel du tourbillon qui dans la version de base divergeait. On a donc atteint l'objectif, à savoir contrôler l'énergie du tourbillon !

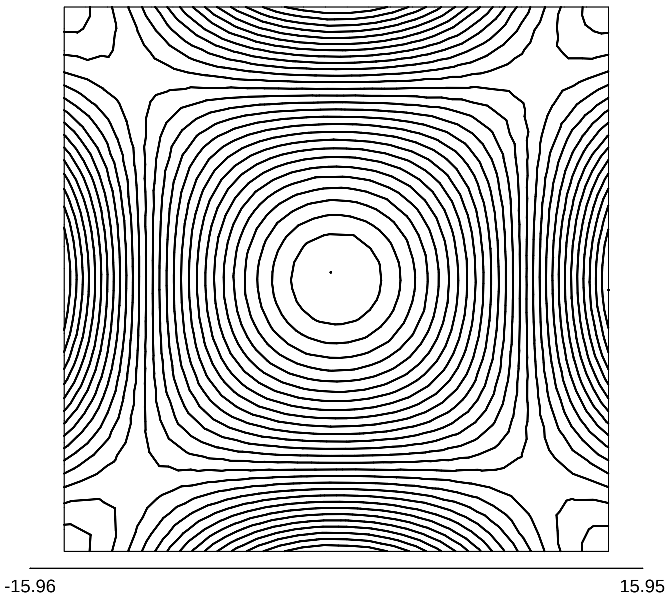


Fig. 4.9 – Isovaleurs du tourbillon sur le maillage non structuré de référence (cas test (2)).

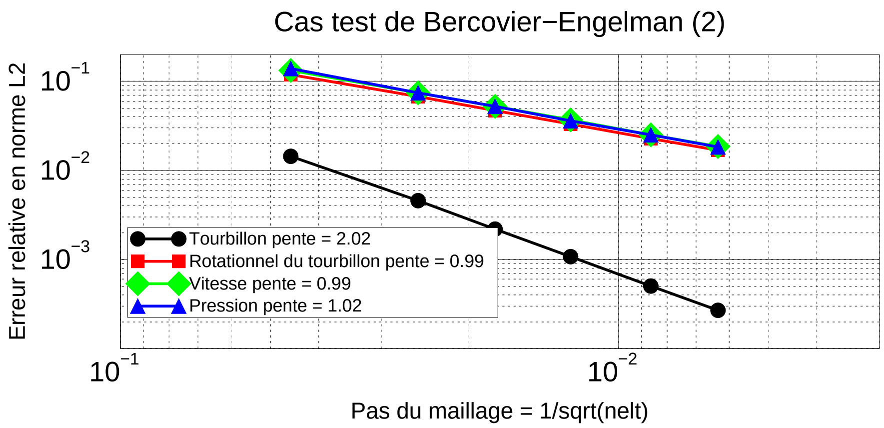


Fig. 4.14 – *Ordre de convergence (cas test de Bercovier-Engelman (2))*

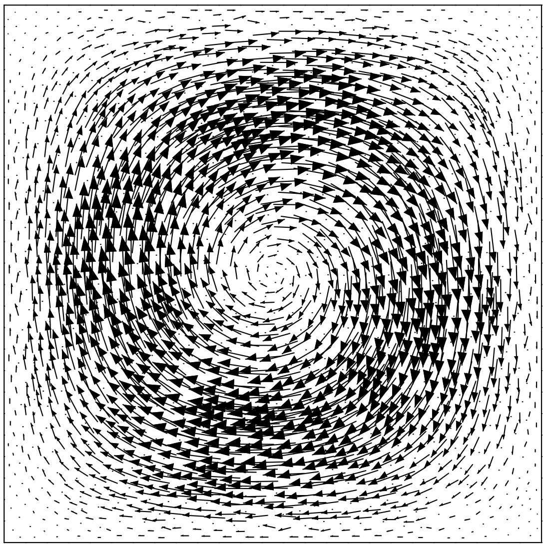


Fig. 4.10 – Vecteurs vitesse : degrés de liberté de Raviart-Thomas (cas test (2)).

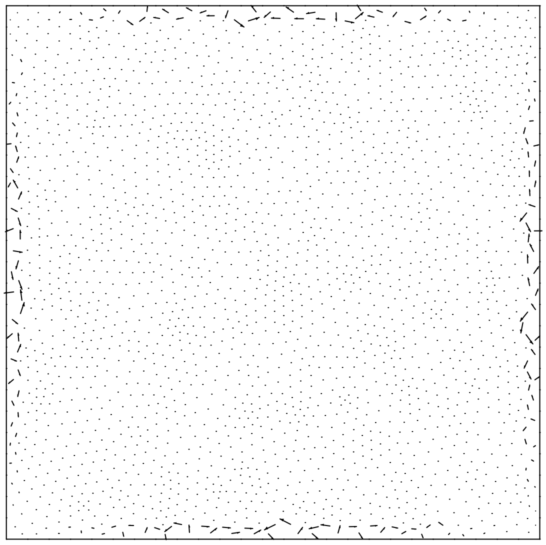


Fig. 4.11 – Vecteurs vitesse : degrés de liberté rajoutés - vitesse bulle (cas test (2)).

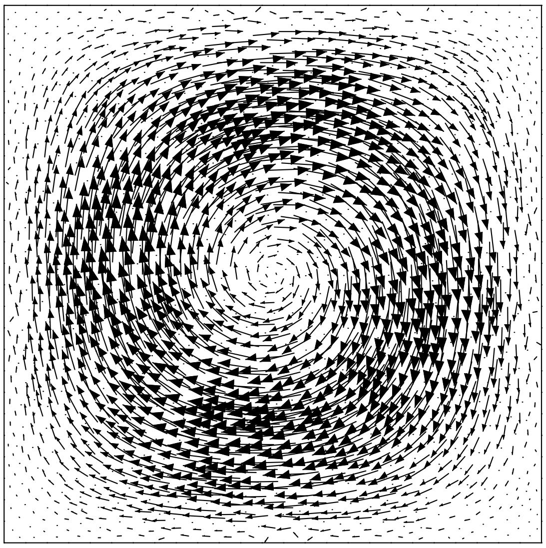


Fig. 4.12 – Vecteurs vitesse : somme des vecteurs vitesse précédents (cas test (2)).

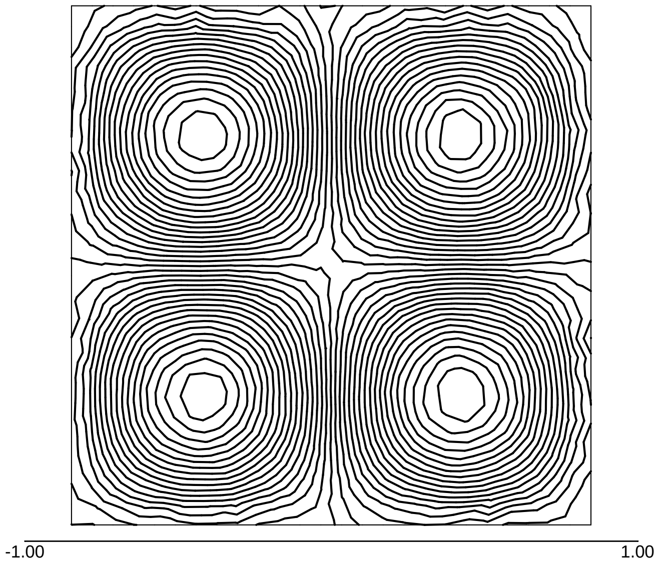


Fig. 4.13 – Isovaleurs de pression sur le maillage non structuré de référence (cas test (2)).

4.4 Stabilité

On va maintenant démontrer que le problème est bien stable comme annoncé, au sens où le rotationnel du tourbillon est contrôlé grâce aux fonctions rajoutées, et voir pourquoi le comportement de la version stabilisée est différent en fonction de la pression au bord du domaine.
N.B : A partir de maintenant, le coefficient de viscosité cinématique est pris égal à 1.
Soit $\mathcal{T}$ une triangulation du domaine Ω supposée uniformément régulière (voir [Cia87]). Ecrivons la formulation dans le cas continu puis dans le cas discret :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\omega,\varphi)-(\mathbf{u},\mathbf{rot}\ \varphi) & = & <\tau_0,\varphi>_\Gamma \quad \forall\ \varphi\in\ W \\ (\mathbf{rot}\ \omega,\mathbf{v})+(\mathrm{div}\ \mathbf{u},\mathrm{div}\ \mathbf{v})-(p,\mathrm{div}\ \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f},\mathbf{v})-<\Pi_0,\mathbf{v}.\mathbf{n}>_\Gamma \quad \forall\ \mathbf{v}\in\ X \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u},q) & = & 0 \quad \forall\ q\in\ Y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega_\mathcal{T},\varphi_\mathcal{T})-(\mathbf{u^{RT}},\mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T})-(\mathbf{u_S},\mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) & = & <\tau_0,\varphi_\mathcal{T}>_\Gamma & \forall\ \varphi_\mathcal{T}\in W_\mathcal{T} \\ (\mathbf{rot}\ \omega_\mathcal{T},\mathbf{v}_\mathcal{T})+(\mathrm{div}\ \mathbf{u^{RT}},\mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T})-(p_\mathcal{T},\mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) & = & (\mathbf{f},\mathbf{v}_\mathcal{T})-<\Pi_0,\mathbf{v}_\mathcal{T}.\mathbf{n}>_\Gamma & \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T}\in X_\mathcal{T} \\ (\mathbf{rot}\ \omega_\mathcal{T},\mathbf{v_S})+[\mathrm{div}\ \mathbf{u_S},\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}] & = & (\mathbf{f},\mathbf{v_S}) & \forall\ \mathbf{v_S}\in X_\mathcal{T}^S \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u^{RT}},q_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ q_\mathcal{T}\in Y_\mathcal{T}. \end{array}\right.$$

Comme nous avons choisi comme espaces discrets des espaces conformes, la formulation continue est vraie pour $\varphi_\mathcal{T}\in W_\mathcal{T}\subset W, \mathbf{v}_\mathcal{T}\in X_\mathcal{T}\subset X, q_\mathcal{T}\in Y_\mathcal{T}\subset Y$, on peut alors soustraire ligne à ligne. Mais la ligne rajoutée dans le cas stabilisé n'a pas d'équivalent dans le continu. On reprend alors l'équation d'équilibre et on la multiplie par une vitesse test rajoutée, ce qui donne après intégration sur Ω :

$$\mathbf{rot}\ \omega+\nabla p=\mathbf{f}\quad /\mathbf{v_S}$$

$$(\mathbf{rot}\ \omega,\mathbf{v_S})+(\nabla p,\mathbf{v_S})=(\mathbf{f},\mathbf{v_S})$$

$$(\mathbf{rot}\ \omega,\mathbf{v_S})-(p,\mathrm{div}\ \mathbf{v_S})=(\mathbf{f},\mathbf{v_S}).$$

N.B : le terme de bord dans l'intégration par parties est nul puisque $\mathbf{v_S}$ est nul sur le bord du domaine (à cause de la bulle).
On peut désormais soustraire les deux problèmes :

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega-\omega_\mathcal{T},\varphi_\mathcal{T})-(\mathbf{u}-\mathbf{u^{RT}},\mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T})+(\mathbf{u_S},\mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ \varphi_\mathcal{T}\in W_\mathcal{T} \\ (\mathbf{rot}\ (\omega-\omega_\mathcal{T}),\mathbf{v}_\mathcal{T})+(\mathrm{div}\ (\mathbf{u}-\mathbf{u^{RT}}),\mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T})-(p-p_\mathcal{T},\mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T}\in X_\mathcal{T} \\ (\mathbf{rot}\ (\omega-\omega_\mathcal{T}),\mathbf{v_S})-[\mathrm{div}\ \mathbf{u_S},\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}]-(p,\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) & = & 0 & \forall\mathbf{v_S}\in X_\mathcal{T}^S \\ (\mathrm{div}\ (\mathbf{u}-\mathbf{u^{RT}}),q_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ q_\mathcal{T}\in Y_\mathcal{T}. \end{array}\right.$$

On introduit alors l'interpolée de la solution exacte c'est-à-dire l'interpolée $\mathbb{P}^1$ du tourbillon, que l'on note $\Pi_\mathcal{T}^1\omega$, l'interpolée $H(\mathrm{div})$ de $\mathbf{u}$, notée $\Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}$ et enfin, l'interpolée $\mathbb{P}^0$ de la pression $\Pi_\mathcal{T}^0 p$. Ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{ll} (\omega_\mathcal{T}-\Pi_\mathcal{T}^1\omega,\varphi_\mathcal{T})-(\mathbf{u^{RT}}-\Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u},\mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T})-(\mathbf{u_S},\mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) & \\ =(\omega-\Pi_\mathcal{T}^1\omega,\varphi_\mathcal{T})-(\mathbf{u}-\Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u},\mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) & \forall\ \varphi_\mathcal{T}\in W_\mathcal{T} \\ & \\ (\mathbf{rot}\ (\omega_\mathcal{T}-\Pi_\mathcal{T}^1\omega),\mathbf{v}_\mathcal{T})+(\mathrm{div}\ (\mathbf{u^{RT}}-\Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}),\mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T})-(p_\mathcal{T}-\Pi_\mathcal{T}^0 p,\mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) & \\ =(\mathbf{rot}\ (\omega-\Pi_\mathcal{T}^1\omega),\mathbf{v}_\mathcal{T})+(\mathrm{div}\ (\mathbf{u}-\Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}),\mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T})-(p-\Pi_\mathcal{T}^0 p,\mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) & \\ & \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T}\in X_\mathcal{T} \\ & \\ (\mathbf{rot}\ (\omega_\mathcal{T}-\Pi_\mathcal{T}^1\omega),\mathbf{v_S})+[\mathrm{div}\ \mathbf{u_S},\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}]=(\mathbf{rot}\ (\omega-\Pi_\mathcal{T}^1\omega),\mathbf{v_S})-(p,\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) & \forall\mathbf{v_S}\in X_\mathcal{T}^S \\ & \\ (\mathrm{div}\ (\mathbf{u^{RT}}-\Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}),q_\mathcal{T})=(\mathrm{div}\ (\mathbf{u}-\Pi_\mathcal{T}^{\mathrm{div}}\mathbf{u}),q_\mathcal{T}) & \forall\ q_\mathcal{T}\in Y_\mathcal{T} \end{array}\right.$$

Lemme 4.4.1 *L'opérateur m défini par*

$$(m, q_{\mathcal{T}}) = (\text{div } (\mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}} \mathbf{u}), q_{\mathcal{T}}) \textit{ pour tout } q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}$$

est tel que

$$(m, q_{\mathcal{T}}) = 0, \ \forall q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}.$$

Preuve

On choisit pour $\Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}}$, l'interpolée classique dans $H(\text{div})$. Rappelons que celui-ci est construit de telle sorte que :

$$\forall a \text{ arête de triangle} \quad \int_a \Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}} \mathbf{u}.\mathbf{n} \, \mathrm{d}\gamma = \int_a \mathbf{u}.\mathbf{n} \, \mathrm{d}\gamma.$$

Donc d'après la formule de Stokes, pour tout triangle K de $\mathcal{T}$, on a

$$\begin{aligned}
(m, q_{\mathcal{T}}) = \int_\Omega \text{div } (\mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}} \mathbf{u}) q_{\mathcal{T}} \, \mathrm{d}x &= \sum_{K \in \mathcal{T}} q_{\mathcal{T}}|_K \int_K \text{div } (\mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}} \mathbf{u}) \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} q_{\mathcal{T}}|_K \int_{\partial K} (\mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}} \mathbf{u}).\mathbf{n} \, \mathrm{d}\gamma \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} q_{\mathcal{T}}|_K \sum_{a \in \partial K} \int_a (\mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}} \mathbf{u}).\mathbf{n} \, \mathrm{d}\gamma = 0.
\end{aligned}$$

■

Par l'inégalité triangulaire, on a les majorations suivantes :

$$\| \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_W \leq \| \omega - \Pi_{\mathcal{T}}^1 \omega \|_W + \| \Pi_{\mathcal{T}}^1 \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_W \tag{4.7}$$

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_X \leq \| \mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}} \mathbf{u} \|_X + \| \Pi_{\mathcal{T}}^{\text{div}} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_X \tag{4.8}$$

$$\| p - p_{\mathcal{T}} \|_Y \leq \| p - \Pi_{\mathcal{T}}^0 p \|_Y + \| \Pi_{\mathcal{T}}^0 p - p_{\mathcal{T}} \|_Y . \tag{4.9}$$

Le premier terme de cette majoration est connu, c'est l'erreur donnée par les résultats classiques d'interpolation dans les espaces d'éléments finis choisis. Il reste à majorer le deuxième terme, c'est ce qui est fait dans la suite.

On va donc étudier la stabilité du schéma.

Soit le triplet $(\theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{w}_{\mathcal{T}} = \mathbf{w}^{RT} + \mathbf{w_S}, r_{\mathcal{T}})$ solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcll}
(\theta_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{w}^{RT}, \mathbf{rot} \ \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{w_S}, \mathbf{rot} \ \varphi_{\mathcal{T}}) &=& (f, \varphi_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{g}, \mathbf{rot} \ \varphi_{\mathcal{T}}) & \forall \ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\
(\mathbf{rot} \ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (\text{div } \mathbf{w}^{RT}, \text{div } \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (r_{\mathcal{T}}, \text{div } \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &=& (\mathbf{k}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (l, \text{div } \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & \forall \ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\
(\mathbf{rot} \ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v_S}) + [\text{div } \mathbf{w_S}, \text{div } \mathbf{v_S}] &=& (\mathbf{k}, \mathbf{v_S}) + (l', \text{div } \mathbf{v_S}) & \forall \ \mathbf{v_S} \in X_{\mathcal{T}}^S \\
(\text{div } \mathbf{w}^{RT}, q_{\mathcal{T}}) &=& 0 & \forall \ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}.
\end{array} \right. \tag{4.10}$$

On cherche à démontrer l'inégalité de stabilité suivante :

$$\| \theta_{\mathcal{T}} \|_W + \| \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \|_X + \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} + \| r_{\mathcal{T}} \|_Y \leq C \left(\| f \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + \| l \|_{0,\Omega} + \| l' \|_{0,\Omega} \right) \tag{4.11}$$

où

$$
\begin{array}{rcl}
f & = & \omega - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \in L^2(\Omega) \\
\mathbf{g} & = & -(\mathbf{u} - \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) \in L^2(\Omega) \\
\mathbf{k} & = & \mathbf{rot}\ (\omega - \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega) \in L^2(\Omega) \\
l & = & -(p - \Pi^0_{\mathcal{T}}p) + \mathrm{div}\ (\mathbf{u} - \Pi^{\mathrm{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) \in L^2(\Omega) \\
(l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) & = & (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) \in L^2(\Omega)
\end{array}
$$

Rappelons les deux propriétés suivantes qui donnent l'existence et l'unicité d'une solution au problème mixte discret :

Proposition 4.4.2 *Pour tout champ de vitesse* $\mathbf{u} \in X_{\mathcal{T}}$ *à divergence nulle, on peut trouver un scalaire* $\varphi \in W_{\mathcal{T}}, \varphi = 0$ *sur* Γ_n *(défini à une constante additive près) tel que* $\mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \varphi$.

Proposition 4.4.3 *Pour tout* $q \in Y_{\mathcal{T}}$*, on peut trouver* $\mathbf{u} \in X_{\mathcal{T}}$ *tel que* $q = \mathrm{div}\ \mathbf{u}$ *et qui vérifie l'inégalité suivante :*

$$\exists\, C > 0\ ,\quad \| \mathbf{u} \|_X \leq \sqrt{1 + C^2}\, \| q \|_Y\ .$$

Remarque 4.4.4 *Les deux propriétés précédentes ne sont autres que les deux conditions inf-sup discrètes nécessaires à l'existence d'une solution au problème mixte posé. Elles s'écrivent aussi sous cette forme (voir chapitre 2) :*

- $\exists\, a > 0\ ,\quad \inf\limits_{q \in Y_{\mathcal{T}}} \sup\limits_{\mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}} \dfrac{(q, \mathrm{div}\ \mathbf{v})}{\| \mathbf{v} \|_X \| q \|_Y} \geq a$

- $\exists\, b > 0\ ,\quad \inf\limits_{\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}} \sup\limits_{\varphi \in W_{\mathcal{T}}} \dfrac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\| \mathbf{v} \|_X \| \varphi \|_W} \geq b$

Le terme en $(l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S})$ est **une erreur de consistance** sur laquelle on peut faire les remarques suivantes.

- si la pression p est constante sur le domaine, comme les fonctions supplémentaires sont à divergence en moyenne nulle, alors $l' = 0$.

- notons $\Pi^1_{\mathcal{T}}p$ l'interpolée $\mathbb{P}^1$ de la pression, nous supposons que le champ p est suffisamment régulier pour que ceci ait un sens.

  La fonction $\mathbf{v_S}$ est une fonction de la forme $\mathbf{v_S} = \displaystyle\sum_{i=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{K \ni i} \alpha_i B.\mathbf{rot}\ \lambda_i$

  où i est le numéro du $i^{\text{ème}}$ sommet de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}} \cap \Gamma$ ensemble des sommets de la triangulation $\mathcal{T}$ qui sont sur le bord du domaine et λ_i la fonction de base coordonnée barycentrique correspondante. Notons

  $\lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{K \ni i} \alpha_i \lambda_i$, alors comme on a choisi la fonction B de sorte que $\displaystyle\int_K B \mathrm{d}x = \mathrm{mes}(K)$,

  on a $\displaystyle\int_K \mathbf{v_S}_{|K}\, \mathrm{d}x = \int_K \mathbf{rot}\ \lambda\, \mathrm{d}x$ pour tout K triangle de la triangulation.

  $$(l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) \quad = \quad \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K p.\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}\, \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K (p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p) \text{ div } \mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x + \int_K \Pi^1_{\mathcal{T}} p.\text{div } \mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K (p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p) \text{ div } \mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x - \int_K \nabla\, \Pi^1_{\mathcal{T}} p.\mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x + \underbrace{< p, \mathbf{v_S}.\mathbf{n} >_{|\partial K}}_{=0} \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K (p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p) \text{ div } \mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x - \int_K \underbrace{\nabla\, \Pi^1_{\mathcal{T}} p}_{\substack{=\text{ constante}\\ \text{sur K}}} .B. \underbrace{\mathbf{rot}\ \lambda}_{\substack{=\text{ constante}\\ \text{sur K}}} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K (p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p) \text{ div } \mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x - \nabla\, \Pi^1_{\mathcal{T}} p.\mathbf{rot}\ \lambda \underbrace{\int_K B \,\mathrm{d}x}_{=\text{ mes(K)}} \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K (p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p) \text{ div } \mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x - \int_K \nabla\, \Pi^1_{\mathcal{T}} p.\mathbf{rot}\ \lambda \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K (p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p) \text{ div } \mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x - \int_{\partial K} \frac{\partial \lambda}{\partial t}.\Pi^1_{\mathcal{T}} p \,\mathrm{d}\gamma \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K (p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p) \text{ div } \mathbf{v_S} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial K} \frac{\partial \Pi^1_{\mathcal{T}} p}{\partial t}.\lambda \,\mathrm{d}\gamma \right)
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_{\partial K} \frac{\partial \Pi^1_{\mathcal{T}} p}{\partial t}.\lambda \,\mathrm{d}x = \sum_{K\in\mathcal{T}\cap\partial\Omega} \int_{\partial K} \frac{\partial \Pi^1_{\mathcal{T}} p}{\partial t}.\lambda \,\mathrm{d}\gamma
$$

car $\Pi^1_{\mathcal{T}} p$ est une fonction continue aux interfaces internes, dont les contributions s'éliminent deux à deux à l'exception des termes de bord. D'où

$$
|(l', \text{div } \mathbf{v_S})| \leq \sum_{K\in\mathcal{T}} \| p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p \|_{0,K} \| \text{ div } \mathbf{v_S} \|_{0,K} + \sum_{K\in\mathcal{T}\cap\partial\Omega} \left| \int_{\partial K} \frac{\partial \Pi^1_{\mathcal{T}} p}{\partial t}.\lambda \,\mathrm{d}\gamma \right|
$$

Un résultat classique sur l'interpolation donne une majoration du terme $\| p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p \|_{0,K}$ si on suppose le champ p assez régulier c'est-à-dire $p \in H^2(\Omega)$ (voir par exemple [CR72]) :

$$
\| p - \Pi^1_{\mathcal{T}} p \|_{0,K} \leq C h^2 \| p \|_{2,K} .
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|(l', \text{div } \mathbf{v_S})| &\leq C \sum_{K\in\mathcal{T}} h^2 \| p \|_{2,K} \| \text{ div } \mathbf{v_S} \|_{0,K} + \sum_{K\in\mathcal{T}\cap\partial\Omega} \left| \int_{\partial K} \frac{\partial \Pi^1_{\mathcal{T}} p}{\partial t}.\lambda \,\mathrm{d}\gamma \right| \\
&\leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \| p \|^2_{2,K} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h^4 \| \text{ div } \mathbf{v_S} \|^2_{0,K} \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{K\in\mathcal{T}\cap\partial\Omega} \left| \int_{\partial K} \frac{\partial \Pi^1_{\mathcal{T}} p}{\partial t}.\lambda \,\mathrm{d}\gamma \right| \\
|(l', \text{div } \mathbf{v_S})| &\leq C\ h_{\mathcal{T}} \| p \|_{2,\Omega} [\text{div } \mathbf{v_S}] + \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial \Pi^1_{\mathcal{T}} p}{\partial t}.\lambda \,\mathrm{d}\gamma \right| \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

où $[\text{div } \mathbf{v_S}]^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \int_K (\text{div } \mathbf{v_S})^2 \, \mathrm{d}x$.

N.B : Comme on a supposé le maillage uniformément régulier, $h_{\mathcal{T}}^2$ est de l'ordre de mes(K).

Cette dernière inégalité nous permet d'affirmer (comme le premier terme est contrôlable), que l'erreur de consistance est homogène à un terme de bord qui s'annule effectivement si la pression est constante sur le bord du domaine d'où la différence de comportement de la version stabilisée.

La démonstration de l'inégalité demande 6 étapes. Les hypothèses nécessaires à la démonstration de chaque étape seront données au fur et à mesure.

Première étape

Elle consiste à faire $\varphi_{\mathcal{T}} = \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{w}^{RT}, q_{\mathcal{T}} = r_{\mathcal{T}}, \mathbf{v_S} = \mathbf{w_S}$ et à sommer les quatre lignes, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 + \| \text{div } \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega}^2 + [\text{div } \mathbf{w_S}]^2 &= (\mathbf{k}, \mathbf{w}^{RT}) + (l, \text{div } \mathbf{w}^{RT}) + (\mathbf{k}, \mathbf{w_S}) \\ &\quad + (l', \text{div } \mathbf{w_S}) + (f, \theta_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{g}, \mathbf{rot } \theta_{\mathcal{T}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 + \| \text{div } \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega}^2 + [\text{div } \mathbf{w_S}]^2 &\leq \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} \\ &\quad + |(l', \text{div } \mathbf{w_S})| + \| l \|_{0,\Omega} \| \text{div } \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} \\ &\quad + \| f \|_{0,\Omega} \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot } \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

où $[\text{div } \mathbf{w_S}]^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \int_K (\text{div } \mathbf{w_S})^2 \, \mathrm{d}x$.

En utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \| \text{div } \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega}^2 + [\text{div } \mathbf{w_S}]^2 &\leq \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} \\ &\quad + |(l', \text{div } \mathbf{w_S})| + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot } \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{2} \| f \|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \| l \|_{0,\Omega}^2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Deuxième étape

Elle permet d'obtenir la majoration de la pression.

On sait (proposition 4.4.3) qu'il existe $\mathbf{v_p}$ dans $X_{\mathcal{T}}$ tel que div $\mathbf{v_p} = r_{\mathcal{T}}$ qui vérifie $\exists\, C > 0$, $\| \mathbf{v_p} \|_X \leq \sqrt{1 + C^2} \| r_{\mathcal{T}} \|_Y$.

On choisit alors $\mathbf{v} = \mathbf{v_p}$ dans la deuxième équation du problème (4.10) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot } \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v_p}) + (\text{div } \mathbf{w}^{RT}, \text{div } \mathbf{v_p}) - (r_{\mathcal{T}}, \text{div } \mathbf{v_p}) &= (\mathbf{k}, \mathbf{v_p}) + (l, \text{div } \mathbf{v_p}) \\ (\mathbf{rot } \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v_p}) + (\text{div } \mathbf{w}^{RT}, r_{\mathcal{T}}) - \underbrace{(r_{\mathcal{T}}, r_{\mathcal{T}})}_{=\| r_{\mathcal{T}} \|_Y^2} &= (\mathbf{k}, \mathbf{v_p}) + (l, r_{\mathcal{T}}) \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\| r_{\mathcal{T}} \|_Y^2 \leq \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{v_p} \|_{0,\Omega} + \| l \|_{0,\Omega} \underbrace{\| r_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}}_{\| r_{\mathcal{T}} \|_Y} + \| \mathbf{rot } \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{v_p} \|_{0,\Omega}$$

$$\begin{aligned}
& + \| \operatorname{div} \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} \underbrace{\| r_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}}_{\|r_{\mathcal{T}}\|_Y} \\
\leq & \sqrt{1+C^2} \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| r_{\mathcal{T}} \|_Y + \| l \|_{0,\Omega} \| r_{\mathcal{T}} \|_Y \\
+ & \sqrt{1+C^2} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \| r_{\mathcal{T}} \|_Y + \| \operatorname{div} \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} \| r_{\mathcal{T}} \|_Y
\end{aligned}$$

soit finalement :

$$\| r_{\mathcal{T}} \|_Y \leq \sqrt{1+C^2} \left(\| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \right) + \| l \|_{0,\Omega} + \| \operatorname{div} \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} \tag{4.14}$$

<u>Troisième étape</u>

Elle consiste à majorer la partie Raviart-Thomas de la vitesse c'est-à-dire $\mathbf{w}^{RT}$. Comme $\mathbf{w}^{RT}$ est à divergence nulle, (faire $q = \operatorname{div} \mathbf{w}^{RT}$ dans la troisième équation du problème (4.10) - ce qui est licite car la divergence d'un champ de Raviart-Thomas est une constante par triangle donc appartient à $Y_{\mathcal{T}}$), on peut utiliser la proposition 4.4.2. Il existe donc un champ scalaire $\varphi^0_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}$ qui est tel que $\mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}} = \mathbf{w}^{RT}$. Dans le cas $\text{mes}(\Gamma_n) \neq 0$, $\varphi^0_{\mathcal{T}} = 0$ sur Γ_n et on a une inégalité de Poincaré, dans le cas Γ_n est de mesure nulle $\varphi^0_{\mathcal{T}}$ est alors défini à une constante additive près. On a donc toujours :

$$\| \varphi^0_{\mathcal{T}} \|_{1,\Omega} \leq C_{pg} \| \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} = C_{pg} \| \mathbf{w}^{RT} \|_X .$$

En prenant $\varphi = \varphi^0_{\mathcal{T}}$ dans la première équation du problème (4.10), il vient :

$$\begin{aligned}
(\theta_{\mathcal{T}}, \varphi^0_{\mathcal{T}}) - (\underbrace{\mathbf{w}^{RT}}_{\mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}}}, \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{w_S}, \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}}) &= (f, \varphi^0_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{g}, \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}}) \\
(\mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}}) &= (f, \varphi^0_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{g}, \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}}) - (\theta_{\mathcal{T}}, \varphi^0_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{w_S}, \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}}) \\
\| \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} = \| \mathbf{w}^{RT} \|^2_X &\leq \| f \|_{0,\Omega} \| \varphi^0_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \\
&+ \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \| \varphi^0_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \varphi^0_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

Avec la majoration précédente, il vient

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{w}^{RT} \|^2_X &\leq C_{pg} \| f \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_X + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_X \\
&+ C_{pg} \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_X + \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_X,
\end{aligned}$$

soit enfin

$$\| \mathbf{w}^{RT} \|_X \leq C_{pg} \left(\| f \|_{0,\Omega} + \| \theta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \right) + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} \tag{4.15}$$

<u>Quatrième étape</u>

On cherche à contrôler la partie en vitesse rajoutée, celle-ci est de la forme

$$\mathbf{w_S} = \sum_{i=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{K \ni i} \alpha_i B.\mathbf{rot}\ \lambda_i$$

où $NS(\mathcal{T}, \Gamma)$ est le nombre de sommets de la triangulation $\mathcal{T}$ qui sont sur le bord du domaine. On note Σ_h l'union des triangles qui ont soit un sommet, soit un côté en commun avec la frontière du domaine. Le support des fonctions rajoutées est contenu dans Σ_h.

Soit $\varphi_{\mathcal{T}}^S = \sum_{i=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{K \ni i} \alpha_i \lambda_i + C \in W_{\mathcal{T}}$, $\mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^S = \sum_{i=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{K \ni i} \alpha_i \mathbf{rot}\ \lambda_i$ et donc

$$\int_K \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^S \, \mathrm{d}x = \int_K \mathbf{w_S} \, \mathrm{d}x, \text{ pour tout } K \text{ de } \Sigma_h$$

De plus, comme $\varphi_{\mathcal{T}}^S$ est défini à une constante additive près, on a également :

$$\| \varphi_{\mathcal{T}}^S \|_{1,\Omega} \leq C_{pg} \| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^S \|_{0,\Omega} .$$

On a la propriété suivante qui va être utile pour la suite :

Propriété 4.4.5

$$\| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega}^2 = (\mathbf{w_S}, \mathbf{w_S}) = \frac{10}{7} \| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^S \|_{0,\Omega}^2 .$$

Preuve

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w_S}, \mathbf{w_S}) &= \left(\sum_{i=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{K \ni i} \alpha_i B.\mathbf{rot}\ \lambda_i, \sum_{j=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{K \ni j} \alpha_j B.\mathbf{rot}\ \lambda_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{j=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \alpha_i \alpha_j \sum_{K \ni i,j} \mathbf{rot}\ \lambda_{i|K}.\mathbf{rot}\ \lambda_{j|K} \underbrace{\int_K B^2}_{= \frac{10}{7}|K|}
\end{aligned}$$

soit

$$\| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega}^2 = \frac{10}{7} \| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^S \|_{0,\Omega}^2 .$$

■

Proposition 4.4.6 *Si la triangulation $\mathcal{T}$ est une triangulation uniformément régulière, la norme L^2 de $\mathbf{w_S}$: $\| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega}$ est équivalente à $[\text{div } \mathbf{w_S}]$ c'est-à-dire :*

$$\exists C_1 > 0 \text{ et } C_2 > 0 \text{ indépendantes du maillage, } C_1 \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} \leq [\text{div } \mathbf{w_S}] \leq C_2 \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} .$$

Preuve

• L'inégalité de droite se démontre à l'aide d'une inégalité inverse (c'est pourquoi la triangulation doit être uniformément régulière).

$$\begin{aligned}
[\text{div } \mathbf{w_S}]^2 = \sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \text{mes}(K) \| \text{div } \mathbf{w_S} \|_{0,K}^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \frac{1}{h_{\mathcal{T}}^2} \text{mes}(K) \| \mathbf{w_S} \|_{0,K}^2 \\
&\leq C_2 \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

car mes(K) est de l'ordre de $h_{\mathcal{T}}^2$.

• Par ailleurs, comme $\mathbf{w_S} = B.\mathbf{rot}\ \lambda_S$, où $\lambda_S = \sum_{i=1}^{NS(\mathcal{T},\Gamma)} \sum_{K \ni i} \alpha_i \lambda_i$, div $\mathbf{w_S} = \nabla B.\mathbf{rot}\ \lambda_S$ donc

$$[\text{div } \mathbf{w_S}]^2 = \sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \text{mes}(K) \int_K (\nabla B.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Un calcul élémentaire mais un peu long donne le résultat suivant, sur tout triangle K :

$$[\text{div } \mathbf{w_S}]^2_{|K} = 10 \text{ mes}(K) \left\{(\nabla\lambda_1.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2 + (\nabla\lambda_2.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2 + (\nabla\lambda_3.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2\right\}$$

où λ_i est la coordonnée barycentrique correspondant au i-ème sommet du triangle K. Par ailleurs, $\| \nabla\lambda_i \| = \dfrac{l_i}{2\text{mes}(K)}$ avec l_i la longueur de l'arête i opposée au sommet i (voir figure 2.2).
Pour fixer les idées, supposons $l_1 = \max(l_1, l_2, l_3)$ et définissons un repère local au triangle dans lequel :

$$\nabla\lambda_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ \nabla\lambda_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \ ; \ \nabla\lambda_3 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 \\ -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Comme de plus

$$\| \nabla\lambda_2 \| = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \frac{l_2}{2\text{mes}(K)} \leq \frac{l_1}{2 \text{ mes}(K)} = |\alpha_1| = \| \nabla\lambda_1 \|,$$

on a $|\alpha_2| \leq |\alpha_1| \quad (*)$.
De plus, $|\alpha_1\beta_2| = \dfrac{1}{2 \text{ mes}(K)} \quad (**)$ par définition du déterminant.
Notons pour simplifier $\mathbf{rot}\ \lambda_S = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
\int_K (\nabla B.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2 \,\mathrm{d}x &\geq 10 \text{ mes}(K) \left\{(\nabla\lambda_1.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2 + (\nabla\lambda_2.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2\right\} \\
&\geq 10 \text{ mes}(K) \left\{(\alpha_1.r_1)^2 + (\alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2)^2\right\} \\
&\geq 10 \text{ mes}(K) \left\{ \underbrace{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) r_1^2 + 2\alpha_2\beta_2 r_1 r_2 + \beta_2^2 r_2^2}_{=Q} \right\}
\end{aligned}$$

Minorons Q :

$$\begin{aligned}
Q &= (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) r_1^2 + 2\ \alpha_2^2 r_1^2 + 2\ \alpha_2\beta_2 r_1 r_2 + \beta_2^2 r_2^2 \\
Q &\geq (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) r_1^2 + 2\ \alpha_2^2 r_1^2 - 2\ |\alpha_2\beta_2 r_1 r_2| + \beta_2^2 r_2^2 \\
Q &\geq (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) r_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 r_1^2 + \frac{1}{3}\beta_2^2 r_2^2
\end{aligned}$$

on a utilisé l'inégalité $2\ |\alpha_2\beta_2 r_1 r_2| \leq \dfrac{3}{2}\alpha_2^2 r_1^2 + \dfrac{2}{3}\beta_2^2 r_2^2$.
On en déduit donc

$$\begin{aligned}
Q &\geq \frac{1}{2}\alpha_1^2 r_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}_{\geq 0 \text{ par } (*)} r_1^2 + \frac{1}{3}\beta_2^2 r_2^2 \\
Q &\geq \frac{1}{3}(\alpha_1^2 r_1^2 + \beta_2^2 r_2^2)
\end{aligned}$$

Donc, comme $\alpha_1 = \dfrac{l_1}{2 \text{ mes}(K)}$ et $\beta_2 = \dfrac{1}{2\ \alpha_1 \text{ mes}(K)} = \dfrac{1}{l_1}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_K (\nabla B.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2 \,\mathrm{d}x &\geq \frac{10}{3} \text{ mes}(K) \left(\left(\frac{l_1}{2 \text{ mes}(K)}\right)^2 r_1^2 + \left(\frac{1}{l_1}\right)^2 r_2^2 \right) \text{ par } (**) \\
\sum_{K\in\mathcal{E}_\mathcal{T}} \int_K (\nabla B.\mathbf{rot}\ \lambda_S)^2 \,\mathrm{d}x &\geq \frac{10}{3} \sum_{K\in\mathcal{E}_\mathcal{T}} (\text{mes}(K))^2 \left(\frac{l_1^2}{4\ (\text{mes}(K))^2} r_1^2 + \frac{1}{l_1^2} r_2^2 \right)
\end{aligned}$$

$$[\text{div } \mathbf{w_S}]^2 \quad \geq \quad \frac{5}{6} \sum_{K \in \mathcal{E}_\mathcal{T}} \text{mes}(K) \left(\frac{l_1^2}{\text{mes}(K)} r_1^2 + \frac{\text{mes}(K)}{l_1^2} r_2^2 \right)$$

Et comme on a supposé la triangulation uniformément régulière, il existe deux constantes indépendantes du pas du maillage $h_\mathcal{T}$ telles que :

$$C_1 h_\mathcal{T} \leq l_1 \leq C_2 h_\mathcal{T}.$$

Ce qui donne l'existence d'une constante C indépendante de $h_\mathcal{T}$ telle que :

$$[\text{div } \mathbf{w_S}]^2 \quad \geq \quad C \sum_{K \in \mathcal{E}_\mathcal{T}} \text{mes}(K)(r_1^2 + r_2^2) = C \sum_{K \in \mathcal{E}_\mathcal{T}} \| \textbf{rot } \lambda_S \|_{0,K}^2$$

$$[\text{div } \mathbf{w_S}] \quad \geq \quad C \| \textbf{rot } \lambda_S \|_{0,\Omega}$$

$$[\text{div } \mathbf{w_S}] \quad \geq \quad C \sqrt{\frac{7}{10}} \| \textbf{rot } \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} \quad \text{par la propriété 4.4.5.}$$

■

Cette proposition est suffisante pour conclure sur le contrôle de la vitesse rajoutée. En effet, reprenons l'inégalité (4.13) et remplaçons $\| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega}$ par $[\text{div } \mathbf{w_S}]$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \| \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \| \text{div } \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega}^2 + [\text{div } \mathbf{w_S}]^2 \quad \leq \quad & \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w_S} \|_{0,\Omega} \\
& + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \textbf{rot } \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + |(l', \text{div } \mathbf{w_S})| \\
& + \frac{1}{2} \| f \|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \| l \|_{0,\Omega}^2 \\
\leq \quad & \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{C_1} \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} [\text{div } \mathbf{w_S}] \\
& + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \textbf{rot } \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + |(l', \text{div } \mathbf{w_S})| \\
& + \frac{1}{2} \| f \|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \| l \|_{0,\Omega}^2
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\| \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega}^2 + \| \text{div } \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega}^2 + [\text{div } \mathbf{w_S}]^2 \right) \quad \leq \quad & \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{w}^{RT} \|_{0,\Omega} + \frac{1}{2\, C_1} \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega}^2 \\
& + \| \mathbf{g} \|_{0,\Omega} \| \textbf{rot } \theta_\mathcal{T} \|_{0,\Omega} + |(l', \text{div } \mathbf{w_S})| \\
& + \frac{1}{2} \| f \|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \| l \|_{0,\Omega}^2 \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Cinquième étape

Il faut maintenant majorer le rotationnel du tourbillon. Pour cela, on utilise la décomposition suivante. Toute fonction $\varphi_\mathcal{T}$ de $W_\mathcal{T}$ se décompose en deux fonctions :

$$\varphi_\mathcal{T} = \varphi_\mathcal{T}^{00} + \varphi_\mathcal{T}^{hd},$$

où $\varphi_\mathcal{T}^{00} \in H_0^1(\Omega) \cap \mathbb{P}^1$ et $\varphi_\mathcal{T}^{hd} \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{P}^1$ est une fonction harmonique discrète (voir le chapitre 5 pour plus de détails sur les fonctions harmoniques discrètes) c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall \chi \in W_\mathcal{T} \cap H_0^1(\Omega) = W_{0,\mathcal{T}} \quad (\nabla \varphi_\mathcal{T}^{hd}, \nabla \chi) = (\textbf{rot } \varphi_\mathcal{T}^{hd}, \textbf{rot } \chi) = 0 \qquad (4.17)$$

avec $\varphi_{\mathcal{T}}^{hd} = \varphi_{\mathcal{T}}$ sur Γ. Alors on a le résultat suivant :

Proposition 4.4.7 *Orthogonalité.*

$$\| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 = \| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{00} \|_{0,\Omega}^2 + \| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{hd} \|_{0,\Omega}^2 .$$

Preuve
En effet,

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}^2 &= (\mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{00} + \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{hd}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{00} + \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{hd}) \\
&= (\mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{00}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{00}) + 2\,\underbrace{(\mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{00}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{hd})}_{=\,0 \text{ par } (4.17)} + (\mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{hd}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{hd}) \\
&= \| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{00} \|_{0,\Omega}^2 + \| \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}^{hd} \|_{0,\Omega}^2
\end{aligned}$$

■

On décompose alors le tourbillon discret de cette façon :

$$\theta_{\mathcal{T}} = \theta_{\mathcal{T}}^{00} + \theta_{\mathcal{T}}^{hd}$$

avec $\theta_{\mathcal{T}}^{hd}$ harmonique discret, $\theta_{\mathcal{T}}^{00} = \theta_{\mathcal{T}} - \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \in H_0^1(\Omega) \cap \mathbb{P}^1$.
La partie harmonique discrète vérifie :

$$\forall \chi \in W_{\mathcal{T}} \cap H_0^1(\Omega) \quad (\nabla \theta_{\mathcal{T}}^{hd}, \nabla \chi) = 0$$

$$\theta_{\mathcal{T}}^{hd} = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}} \sum_{K \ni i} \beta_i \lambda_i$$

• Comme pour toute fonction φ de $H_0^1 \cap \mathbb{P}^1$, on peut trouver une fonction de Raviart-Thomas à divergence nulle sur tout triangle de la triangulation, telle que $\mathbf{v^{RT}}.\mathbf{n} = 0$ sur tout le bord du domaine et qui vérifie sur tout triangle $\mathbf{v^{RT}} = \mathbf{rot}\ \varphi$. (proposition 4.4.2)
On peut donc construire un champ de vitesse $\mathbf{v^{RT}}$ qui est tel que $\mathbf{v^{RT}} = \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{00}$ sur tout triangle, et en prenant ce champ dans la deuxième équation du problème auxiliaire, comme

$$\begin{aligned}
(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v^{RT}}) &= (\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{00} + \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd}, \mathbf{v^{RT}}) \\
&= \underbrace{(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{00}, \mathbf{v^{RT}})}_{=\|\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{00}\|^2} + \underbrace{(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd}, \mathbf{v^{RT}})}_{=0} \ \text{par } 4.17,
\end{aligned}$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}, \mathbf{v^{RT}}) &= (\mathbf{k}, \mathbf{v^{RT}}) \\
\text{soit} \ \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{00} \|_{0,\Omega}^2 &= (\mathbf{k}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{00}) \\
\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{00} \|_{0,\Omega} &\leq \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} .
\end{aligned}$$

• Il reste à majorer la partie harmonique discrète. Décomposons $\theta_{\mathcal{T}}^{hd}$:

$$\theta_{\mathcal{T}}^{hd} = \theta_{\mathcal{T}}^{hd0} + \theta_{\mathcal{T}}^{hdb},$$

avec $\theta_{\mathcal{T}}^{hd0} \in H_0^1(\Omega)$ et la partie $\theta_{\mathcal{T}}^{hdb}$ ne vivant que sur le bord du domaine.
Pour démontrer cette étape, on suppose que l'inégalité suivante très importante est vraie :

$\boxed{\text{Hypothèse importante}}$ l'énergie de la partie H_0^1 d'une fonction harmonique discrète est majorée par l'énergie de la fonction elle-même c'est-à-dire :
il existe $C > 0$ indépendante de $h_{\mathcal{T}}$ telle que

$$\| \, \mathbf{rot} \ \theta_{\mathcal{T}}^{hd0} \, \|_{0,\Omega} \leq C \, \| \, \mathbf{rot} \ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \, \|_{0,\Omega} \ . \tag{4.18}$$

Par inégalité triangulaire on aura alors :

$$\| \, \mathbf{rot} \ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb} \, \|_{0,\Omega}^2 \leq (1+C) \, \| \, \mathbf{rot} \ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \, \|_{0,\Omega}^2 \ .$$

Remarque 4.4.8 *De façon générale, cette inégalité est fausse (il suffit de prendre $\theta_{\mathcal{T}}$ constant sur Ω, alors* $\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} = 0$ *tandis que* $\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^0 \neq 0$.*). Mais les fonctions considérées ici sont harmoniques discrètes donc à décroissance très rapide près du bord.*

Soit $\mathbf{v_S} = B.\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb}$ donc tel que $\displaystyle\int_K \mathbf{v_S} \mathrm{d}x = \int_K \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb} \mathrm{d}x$ pour tout K de Σ_h. On a alors la propriété suivante :

Propriété 4.4.9

$$(\mathbf{v_S}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd}) = \| \, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \, \|_{0,\Omega}^2 \ .$$

<u>Preuve</u>

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v_S}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd}) &= (\mathbf{v_S}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd0}) + (\mathbf{v_S}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb}) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \left(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}|_K}^{hd0} \int_K \mathbf{v_S} \mathrm{d}x + \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}|_K}^{hdb} \int_K \mathbf{v_S} \mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \left(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}|_K}^{hd0} \int_K \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}|_K}^{hdb} \mathrm{d}x + \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb} \int_K \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb} \mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \int_K \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \int_K \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \mathrm{d}x \text{ car } \int_K \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd0} \mathrm{d}x = 0 \\
&= \| \, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \, \|_{0,\Omega}^2 \ .
\end{aligned}$$

■

Prenons $\mathbf{v_S}$ dans la troisième équation du problème auxiliaire, on obtient :

$$(\mathbf{rot}\ (\theta_{\mathcal{T}}^{00} + \theta_{\mathcal{T}}^{hd}), \mathbf{v_S}) + [\mathrm{div}\ \mathbf{w_S}, \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}] \ = \ (\mathbf{k}, \mathbf{v_S}) + (l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}),$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd}, \mathbf{v_S}) = \| \, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \, \|_{0,\Omega}^2 &\leq \| \, \mathbf{k} \, \|_{0,\Omega} \ \ \| \, \mathbf{v_S} \, \|_{0,\Omega} + |(l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S})| \\
&\quad + [\mathrm{div}\ \mathbf{w_S}][\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}] + \| \, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{00} \, \|_{0,\Omega} \| \, \mathbf{v_S} \, \|_{0,\Omega} \\
\| \, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \, \|_{0,\Omega}^2 &\leq \| \, \mathbf{k} \, \|_{0,\Omega} \ \sqrt{\frac{10}{7}} \ \| \, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb} \, \|_{0,\Omega} + |(l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S})| \\
&\quad + [\mathrm{div}\ \mathbf{w_S}][\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}] + \sqrt{\frac{10}{7}} \ \| \, \mathbf{k} \, \|_{0,\Omega} \ \ \| \, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb} \, \|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (4.18) et l'équivalence entre [div $\mathbf{v_S}$] et $\| \mathbf{v_S} \|_{0,\Omega}$, on obtient

$$\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \|_{0,\Omega}^2 \leq C \left(\| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + [\mathrm{div}\ \mathbf{w_S}] \right) \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \|_{0,\Omega} + |(l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S})|. \tag{4.19}$$

Sixième étape

Enfin, il faut contrôler l'erreur de consistance dans le cas où la pression est non constante sur le bord du domaine. Nous allons maintenant utiliser une démonstration proche de celle réalisée par Scholz [Sch78] pour améliorer la majoration du terme restant. On va supposer ici que le champ p appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$. Comme $\mathbf{v_S}$ n'est définie que sur cette partie Σ_h du domaine, on a :

$$\begin{aligned}
(l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) &= \sum_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} (p, \mathrm{div}\ \mathbf{v_S}) \\
&= \sum_{K \in \Sigma_h} \int_K (p - \Pi_{\mathcal{T}}^0 p) \mathrm{div}\ \mathbf{v_S} \mathrm{d}x \\
|(l', \mathrm{div}\ \mathbf{v_S})| &\leq \sum_{K \in \Sigma_h} \| p - \Pi_{\mathcal{T}}^0 p \|_{0,2,K} \| \mathrm{div}\ \mathbf{v_S} \|_{0,2,K} \\
&\leq \sum_{K \in \Sigma_h} C h_{\mathcal{T}}^2 |p|_{1,\infty,K} \| \mathrm{div}\ \mathbf{v_S} \|_{0,2,K} \quad \text{par interpolation} \\
&\leq \sum_{K \in \Sigma_h} C \sqrt{\mathrm{mes}(K)} h_{\mathcal{T}} |p|_{1,\infty,K} \| \mathrm{div}\ \mathbf{v_S} \|_{0,2,K} \\
&\leq C\ |p|_{1,\infty,\Omega} \sum_{K \in \Sigma_h} \sqrt{\mathrm{mes}(K)} h_{\mathcal{T}} \| \mathrm{div}\ \mathbf{v_S} \|_{0,2,K} \\
&\leq C\ |p|_{1,\infty,\Omega} \sum_{K \in \Sigma_h} \sqrt{\mathrm{mes}(K)} \| \mathbf{v_S} \|_{0,2,K} \quad \text{par inégalité inverse} \\
&\leq C\ |p|_{1,\infty,\Omega} \underbrace{\left(\sum_{K \in \Sigma_h} \mathrm{mes}(K) \right)^{1/2}}_{\sqrt{\mathrm{mes}(\Sigma_h)}} \underbrace{\| \mathbf{v_S} \|_{0,2,\Sigma_h}}_{=\|\mathbf{v_S}\|_{0,2,\Omega}} \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\
&\leq C\ |p|_{1,\infty,\Omega} \sqrt{h_{\mathcal{T}}} \| \mathbf{v_S} \|_{0,2,\Omega} \\
&\leq C \sqrt{\frac{10\ h_{\mathcal{T}}}{7}} |p|_{1,\infty,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hdb} \|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité finale de majoration du rotationnel :

$$\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \|_{0,\Omega} \leq C \left(\| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + [\mathrm{div}\ \mathbf{w_S}] + \sqrt{h_{\mathcal{T}}}\ |p|_{1,\infty,\Omega} \right)$$

En combinant les inégalités (4.13-4.14-4.15-4.16- 4.19-4.20), on obtient l'inégalité de stabilité (4.11) cherchée.
A partir de (4.11) et des inégalités triangulaires (4.7-4.8-4.9), on déduit l'ordre de convergence de la méthode (voir le chapitre 2) et on obtient :

Théorème 4.4.10 *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation uniformément régulière, si $\omega \in H^2(\Omega)$, $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2$, div $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$, $p \in W^{1,\infty}(\Omega)$ solutions du problème stabilisé (4.3-4.6) et si l'hypothèse (4.18) est* *vérifiée, on a :*

$$\| \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_W + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_X + \| p - p \|_Y \leq C\sqrt{h_{\mathcal{T}}}\left(\| \omega \|_{1,\Omega} + \| \mathbf{u} \|_{1,\Omega} + |p|_{1,\infty,\Omega}\right).$$

Remarque 4.4.11 *Le théorème précédent permet de conclure que :*
• *si la pression n'est pas constante sur le bord du domaine, la convergence a lieu en $\mathcal{O}(\sqrt{h_{\mathcal{T}}})$, ce qui n'est pas mieux que le résultat classique ([Sch78]-[GR86]) si ce n'est que le rotationnel du tourbillon est contrôlé cette fois.*
• *mais si la pression est constante sur le bord du domaine, en reprenant l'inégalité (4.19) et en utilisant la majoration (4.12), on obtient :*

$$\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \|_{0,\Omega}^2 \quad \leq \quad C \quad (\| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} + [\mathrm{div}\ \mathbf{w_S}])\ \| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}^{hd} \|_{0,\Omega} + h_{\mathcal{T}} \| p \|_{2,\Omega} [\mathrm{div}\ \mathbf{v_S}],$$

car le terme $\left| \int_{\Gamma} \frac{\partial \Pi_{\mathcal{T}}^1 p}{\partial t}.\lambda \right|$ *est nul. La convergence a alors lieu en $\mathcal{O}(h_{\mathcal{T}})$. Ce que l'on voit bien numériquement (voir les courbes de convergence 4.8 et 4.14).*

4.5 Résultats numériques pour la formulation (ψ, ω) stabilisée

Le post-traitement de la pression est identique au post-traitement sans stabilisation (voir annexe en fin de chapitre 3).

On présente les résultats obtenus sur les cas tests de Bercovier-Engelman (1) et (2), toujours avec le maillage non structuré de référence (2.7). Les courbes de convergence sont présentées en figure 4.15 et 4.16.

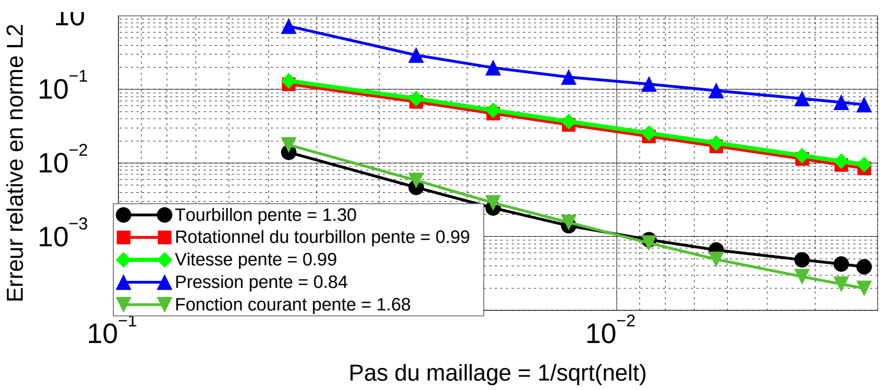


Fig. 4.15 – *Ordre de convergence - maillages non structurés non emboîtés - cas test de Bercovier-Engelman (1).*

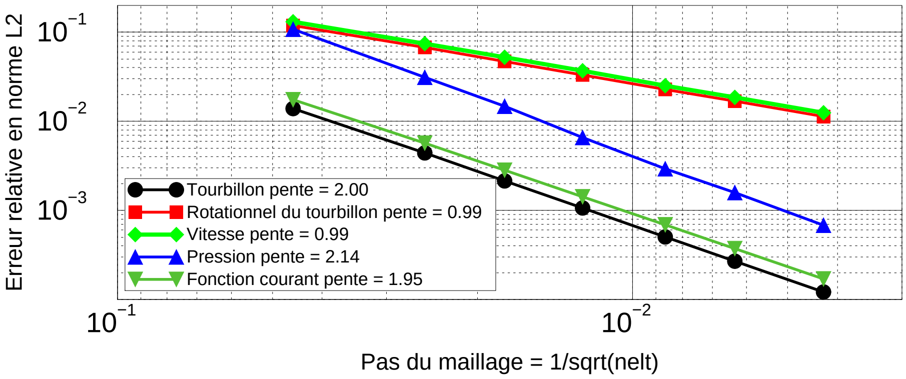


Fig. 4.16 – *Ordre de convergence - maillages non structurés non emboîtés - cas test de Bercovier-Engelman (2).*

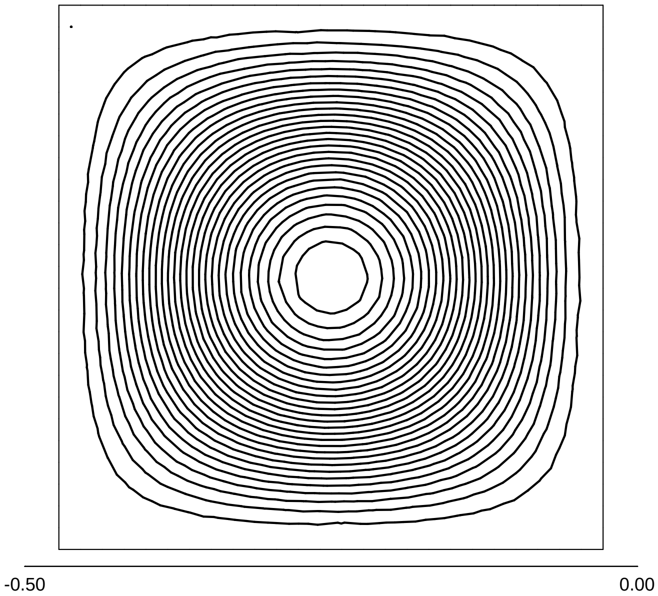


Fig. 4.17 – Isovaleurs de la fonction courant (cas test (1)).

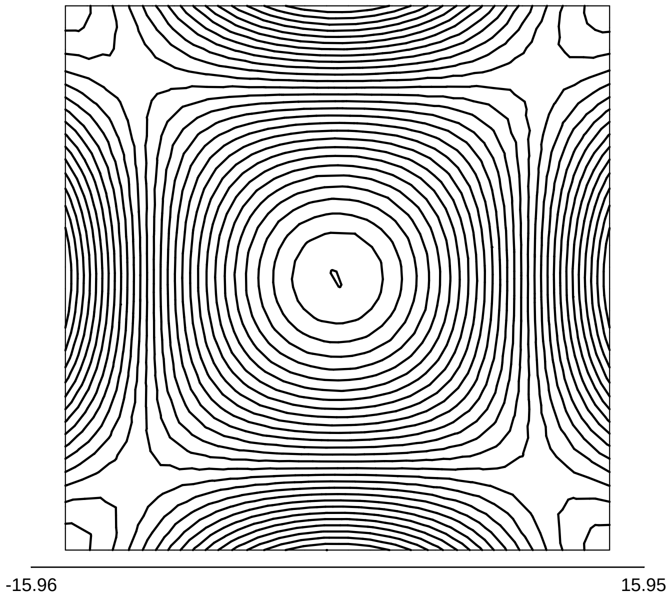


Fig. 4.18 – Isovaleurs du tourbillon sur le maillage non structuré de référence (cas test (1)).

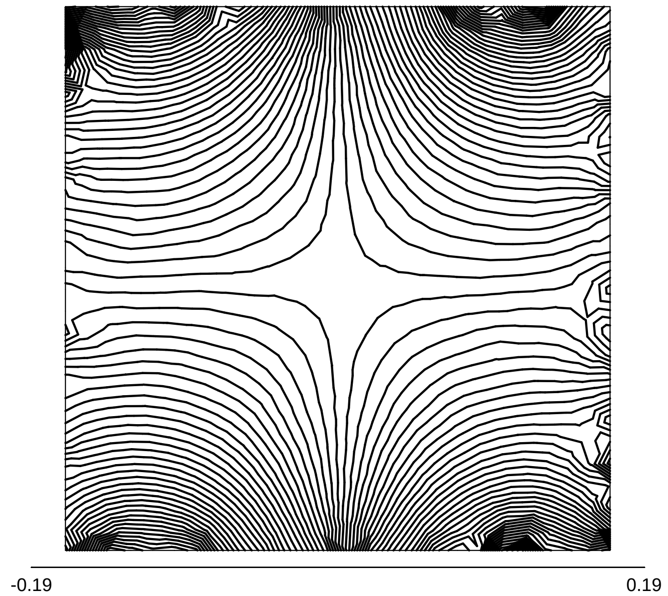


Fig. 4.19 – Isovaleurs de pression sur le maillage non structuré de référence (cas test (1)).

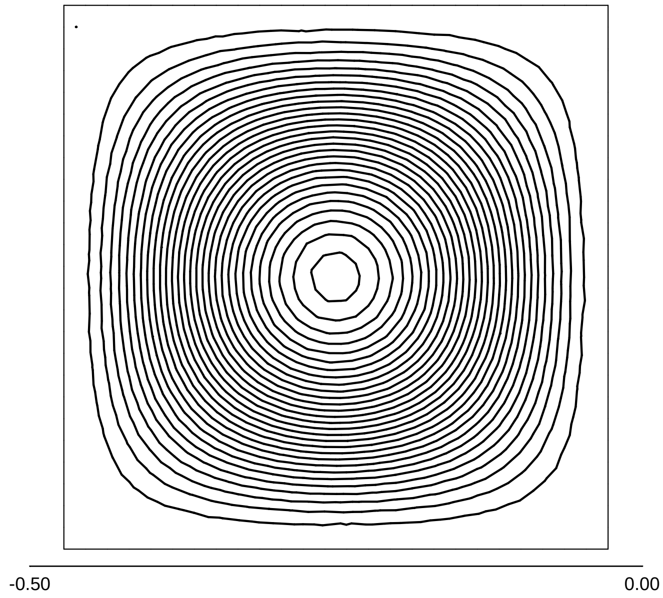


Fig. 4.20 – Isovaleurs de la fonction courant (cas test (2)).

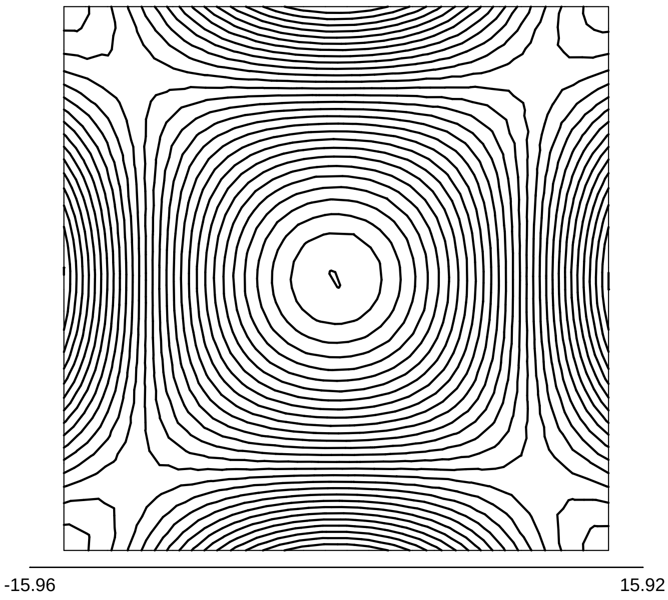


Fig. 4.21 – Isovaleurs du tourbillon sur le maillage non structuré de référence (cas test (2)).

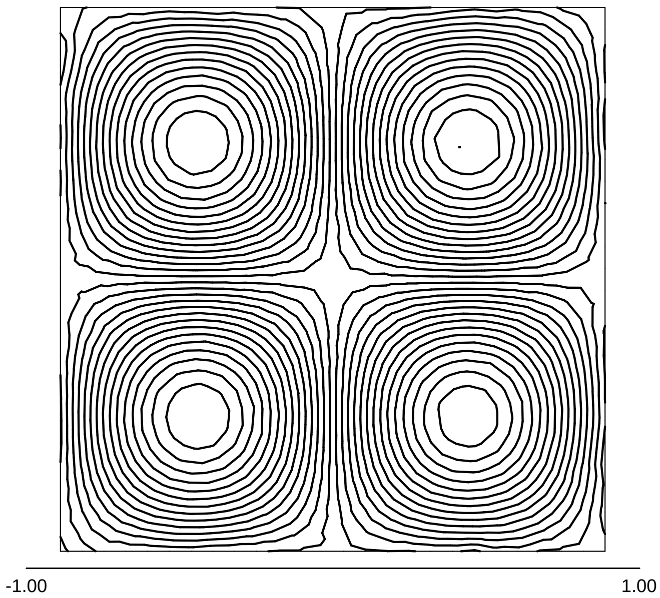


Fig. 4.22 – Isovaleurs de pression sur le maillage non structuré de référence (cas test (2)).

Chapitre 5

Fonctions harmoniques discrètes

5.1 Une troisième condition inf-sup

Dans le chapitre 2, nous avons essayé de démontrer la stabilité du problème de Stokes posé en formulation tourbillon-vitesse-pression :

$$\left\{\begin{array}{lcll}(\omega,\varphi)-(\mathbf{u},\mathbf{rot}\ \varphi) & = & <\tau_0,\varphi>_\Gamma & \forall\ \varphi\in\ W\\ \nu\ (\mathbf{rot}\ \omega,\mathbf{v})-(p,\mathrm{div}\ \mathbf{v}) & = & (\mathbf{f},\mathbf{v})-<\Pi_0,\mathbf{v}.\mathbf{n}>_\Gamma & \forall\ \mathbf{v}\in\ X\\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u},q) & = & 0 & \forall\ q\in\ Y.\end{array}\right.$$

Mais le rotationnel du tourbillon ne peut être contrôlé et c'est ce qui explique les problèmes numériques évoqués dans ce même chapitre 2. Nous allons donc essayer de trouver une hypothèse supplémentaire minimale pour contrôler l'énergie du tourbillon et démontrer la stabilité, puis nous allons vérifier que cette hypothèse est manquante dans le cadre où nous nous sommes placés.

En l'occurence, on peut démontrer qu'à l'aide d'une troisième condition inf-sup, le problème est à la fois bien posé et stable. Puis nous allons montrer que cette nouvelle condition inf-sup ne peut être démontrée dans les espaces discrets précédemment explicités.

5.2 Stabilité

On reprend les notations du chapitre 2. On doit démontrer l'inégalité suivante :

$$\boxed{\|\ \theta_{\mathcal{T}}\ \|_W+\|\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\ \|_X+\|\ r_{\mathcal{T}}\ \|_Y\leq C\left(\|\ f\ \|_{0,\Omega}+\|\ \mathbf{g}\ \|_{0,\Omega}+\|\ \mathbf{k}\ \|_{0,\Omega}+\|\ l\ \|_{0,\Omega}+\|\ m\ \|_{0,\Omega}\right).}$$

où $(\theta_{\mathcal{T}},\mathbf{w}_{\mathcal{T}},r_{\mathcal{T}})\in W_{\mathcal{T}}\times X_{\mathcal{T}}\times Y_{\mathcal{T}}$ est solution du problème auxiliaire suivant (voir chapitre 2) :

$$\left\{\begin{array}{lcll}(\theta_{\mathcal{T}},\varphi_{\mathcal{T}})-(\mathbf{w}_{\mathcal{T}},\mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & (f,\varphi_{\mathcal{T}})+(\mathbf{g},\mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & \forall\ \varphi_{\mathcal{T}}\in W_{\mathcal{T}}\\ (\mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}},\mathbf{v}_{\mathcal{T}})+(\mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}},\mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}})-(r_{\mathcal{T}},\mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & (\mathbf{k},\mathbf{v}_{\mathcal{T}})+(l,\mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\in X_{\mathcal{T}}\\ (\mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}},q_{\mathcal{T}}) & = & (m,q_{\mathcal{T}}) & \forall\ q_{\mathcal{T}}\in Y_{\mathcal{T}}\end{array}\right.$$

avec pour hypothèses les trois conditions inf-sup discrètes :

- $$\exists\ a > 0\ ,\ \inf_{q \in Y_{\mathcal{T}}} \sup_{\mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}} \frac{(q, \mathrm{div}\ \mathbf{v})}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X \|\ q\ \|_Y} \geq a. \tag{5.1}$$

- $$\exists\ b > 0\ ,\ \inf_{\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}} \sup_{\varphi \in W_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X \|\ \varphi\ \|_W} \geq b. \tag{5.2}$$

- La condition supplémentaire :

$$\exists\ c > 0\ ,\ \inf_{\varphi \in W_{\mathcal{T}}} \sup_{\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X \|\ \mathbf{rot}\ \varphi\ \|_{0,\Omega}} \geq c. \tag{5.3}$$

Pour la démonstration, la première étape reste inchangée puisque la formulation n'a pas été modifiée. Elle donne donc l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\ \theta_{\mathcal{T}}\ \|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\|\ \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\ \|^2_{0,\Omega} \quad &\leq \quad \|\ m\ \|_{0,\Omega} \|\ r_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathbf{k}\ \|_{0,\Omega} \|\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\|\ l\ \|^2_{0,\Omega} \\ &+ \quad \frac{1}{2}\|\ f\ \|^2_{0,\Omega} + \|\ \mathbf{g}\ \|_{0,\Omega} \|\ \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega}\ .\end{aligned}$$

Ensuite par l'utilisation des deux conditions inf-sup déjà introduites, on obtient en premier lieu, la majoration de la pression $r_{\mathcal{T}}$ (à l'aide de la condition inf-sup pression-vitesse (5.1)) :

$$\|\ r_{\mathcal{T}}\ \|_Y \leq \frac{1}{a}\left\{\|\ \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} + \|\ l\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathbf{k}\ \|_{0,\Omega}\right\},$$

en deuxième lieu, la majoration de la vitesse $\mathbf{w}_{\mathcal{T}}$ (à l'aide de la condition inf-sup vitesse-tourbillon (5.2) et de la condition pression-vitesse (5.1)) :

$$\|\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} \quad \leq \quad \frac{1}{b}\left\{\|\ \theta_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} + \|\ f\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathbf{g}\ \|_{0,\Omega} + \left(\frac{b+1}{a}\right)\|\ m\ \|_{0,\Omega}\right\}.$$

Il reste à utiliser la troisième condition inf-sup, la condition tourbillon-vitesse (5.3).
Comme $\theta_{\mathcal{T}}$ appartient à $W_{\mathcal{T}}$:

$$\begin{aligned} c\ \ \|\ \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega} \quad &\leq \quad \sup_{\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}})}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X} \\ &\leq \quad \sup_{\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (l, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (\mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}})}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X} \ \text{car}\ \underbrace{(r_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = 0}_{\substack{\text{par définition} \\ \text{de } V_{\mathcal{T}}}} \\ &\leq \quad \|\ \mathbf{k}\ \|_{0,\Omega} + \|\ l\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathrm{div}\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\ \|_{0,\Omega}\ .\end{aligned}$$

On a à nouveau utilisé les majorations

$$\begin{aligned}\|\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}\ \|_{0,\Omega} \quad &\leq \quad \|\ \mathbf{v}\ \|_X \qquad \forall \mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}. \\ \|\ \mathbf{v}\ \|_{0,\Omega} \quad &\leq \quad \|\ \mathbf{v}\ \|_X \qquad \forall \mathbf{v} \in X_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Il est clair qu'en combinant les quatre résultats précédents, on obtient l'inégalité recherchée

$$\|\ \theta_{\mathcal{T}}\ \|_W + \|\ \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\ \|_X + \|\ r_{\mathcal{T}}\ \|_Y \leq C\left(\|\ f\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathbf{g}\ \|_{0,\Omega} + \|\ \mathbf{k}\ \|_{0,\Omega} + \|\ l\ \|_{0,\Omega} + \|\ m\ \|_{0,\Omega}\right).$$

Le problème dans ce cas est donc stable et ce quelles que soient les conditions limites imposées.

5.3 Condition inf-sup tourbillon-vitesse

La question est maintenant de savoir si cette troisième condition inf-sup est vraie avec les espaces que nous avons choisis. La condition inf-sup (5.3) s'écrit :

$$\exists\, c > 0\ , \quad \inf_{\varphi \in W_{\mathcal{T}}} \sup_{\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{rot}\ \varphi)}{\|\ \mathbf{v}\ \|_X \|\ \mathbf{rot}\ \varphi\ \|_{0,\Omega}} \geq c.$$

On va démontrer qu'elle ici mise en défaut dans le cas de conditions limites classiques c'est-à-dire lorsque la vitesse est cherchée nulle sur tout le bord ($\Gamma_n = \Gamma, \Gamma_\omega = \emptyset$). Considérons $h_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}}$ vérifiant le problème suivant :

$$\forall \chi \in W_{\mathcal{T}} \cap H_0^1(\Omega) \quad (\mathbf{rot}\ h_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \chi) \quad = \quad 0. \tag{5.4}$$

Ces fonctions que nous appelleront fonctions harmoniques discrètes (puisque leur laplacien au sens discret est nul) ont déjà été introduites par Glowinski et Pironneau [GP79], Achdou, Glowinski et Pironneau [AGP92] et Ruas [Rua95].

Remarque 5.3.1 *Il faut noter que de telles fonctions sont inhérentes au problème discret et sont identiquement nulles dans le continu.*

Or on a déjà vu que toute fonction $\mathbf{v}$ de $V_{\mathcal{T}}$, peut se mettre sous la forme $\mathbf{rot}\ \chi_{\mathcal{T}}$ où $\chi_{\mathcal{T}}$ appartient à $W_{\mathcal{T}} \cap H_0^1(\Omega)$ (voir chapitre 3 par exemple). D'où,

$$\begin{gathered}\forall \mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}}, \mathbf{v} = \mathbf{rot}\ \chi_{\mathcal{T}}, \chi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \cap H_0^1(\Omega) = W_{0,\mathcal{T}} = H^1_{0,\mathcal{T}}\ , \\ (\mathbf{rot}\ h_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) = (\mathbf{rot}\ h_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \chi_{\mathcal{T}}) = 0 \text{ par définition de } h_{\mathcal{T}}(5.4)\end{gathered}$$

Comme ni $\mathbf{v}$, ni $h_{\mathcal{T}}$ ne sont de norme nulle, la condition inf-sup ne peut pas être vérifiée.

5.4 Relèvements de fonctions harmoniques discrètes

A cause de la présence des fonctions harmoniques discrètes dans les espaces discrets que nous avons choisis, cette dernière condition inf-sup ne peut être vérifiée. Ceci explique que dans le cadre où nous nous sommes placés, nous rencontrions des problèmes numériques. En particulier, les fonctions tests en vitesse, sont orthogonales au tourbillon sur le bord (qui se décompose sur les fonctions harmoniques discrètes voir chapitre 4 par exemple), et c'est pourquoi nous n'arrivons pas à approcher le tourbillon sur le bord de notre domaine.

On appelle fonctions harmoniques de base les fonctions qui sont telles que :

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\nabla h_j, \nabla \xi) & = & 0 \quad\ \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \\ h_j(S_i) & = & \delta_{ij} \quad \text{où } S_j \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \cap \Gamma \text{ est le } i^{\text{ème}} \text{ sommet sur } \Gamma.\end{array}\right. \tag{5.5}$$

Remarque 5.4.1 *On rappelle que $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ est l'ensemble des sommets de la triangulation (voir chapitre 2).*

Notons que le nombre de fonctions harmoniques discrètes est donc égal au nombre de sommets de la triangulation $\mathcal{T}$ sur Γ (on note ce nombre $NS(\mathcal{T}, \Gamma)$).

Remarque 5.4.2 *On pourrait définir des fonctions harmoniques discrètes qui ne soient pas orthogonales à $H_0^1(\Omega)$ mais à $H_0^1(\Omega, \Gamma_n) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega),\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_n\right\}$.*

Les fonctions harmoniques discrètes n'étant pas rigoureusement harmoniques, on les décompose en deux composantes, une composante harmonique et une composante H_0^1 (voir la décomposition de $M(\Omega)$ proposition 3.3.7) :

$$h_j = h_j^0 + h_j^\Delta$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta h_j^0 & = & \Delta h_j \\ h_j^0 & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta h_j^\Delta & = & 0 \\ h_j^\Delta & = & h_j \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Remarque 5.4.3 *On rappelle que les fonctions harmoniques de $L^2(\Omega)$ ont une trace dans l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ (voir proposition 3.3.5 chapitre 3).*

Le défaut d'harmonicité des fonctions harmoniques discrètes peut être représenté à l'aide de « relèvements » dans $H_0^1(\Omega)$ définis de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\nabla \eta_j, \nabla \zeta) & = & (\nabla h_j, \nabla \zeta) & \forall \zeta \in H_0^1(\Omega) \\ \eta_j & = & 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \tag{5.6}$$

On peut aussi approcher les relèvements $\eta_j \in H_0^1(\Omega)$ par des fonctions discrètes $\eta_{\mathcal{T}}^{j,l}$ relèvements discrets dans $H_{0,\mathcal{T}_l}^1$ définis par le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\nabla \eta_{\mathcal{T}}^{j,l}, \nabla \chi) & = & (\nabla h_j, \nabla \chi) & \forall \chi \in H_{0,\mathcal{T}_l}^1 \\ \eta_{\mathcal{T}}^{j,l} & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \tag{5.7}$$

où $\mathcal{T}_k$ est une famille de triangulations récursive :

(i) $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$

(ii) $\mathcal{T}_{k+1} \subset \mathcal{T}_k$ est obtenue par division en quatre triangles homothétiques de chacun des triangles de $\mathcal{T}_k$ (voir figure 5.1).

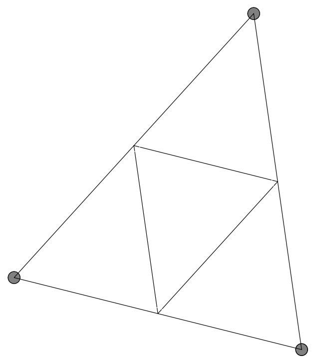


Fig. 5.1 – *Division d'un triangle de $\mathcal{T}_k$*

On trouvera des représentations des fonctions harmoniques de base et de ses relèvements figure 5.2 à figure 5.5).

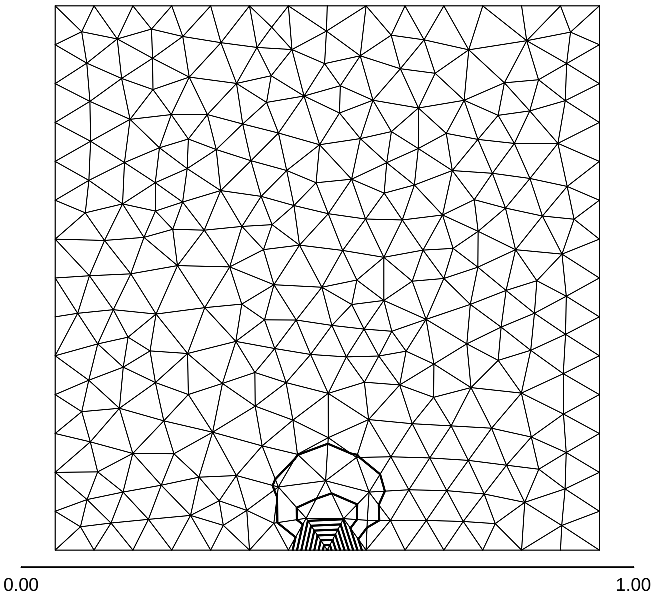


Fig. 5.2 – Isovaleurs d'une fonction harmonique discrète de base.

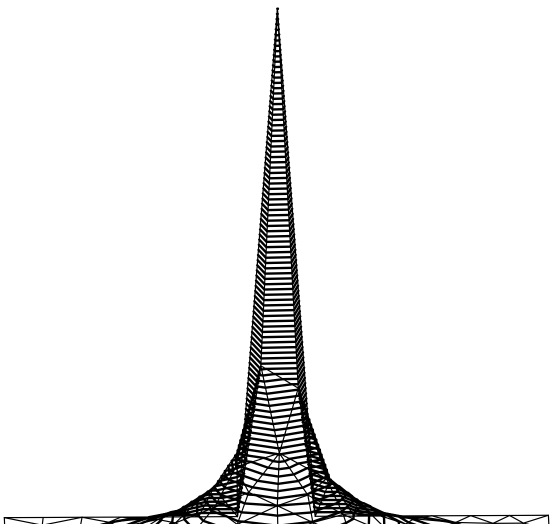


Fig. 5.3 – Une fonction harmonique discrète de base.

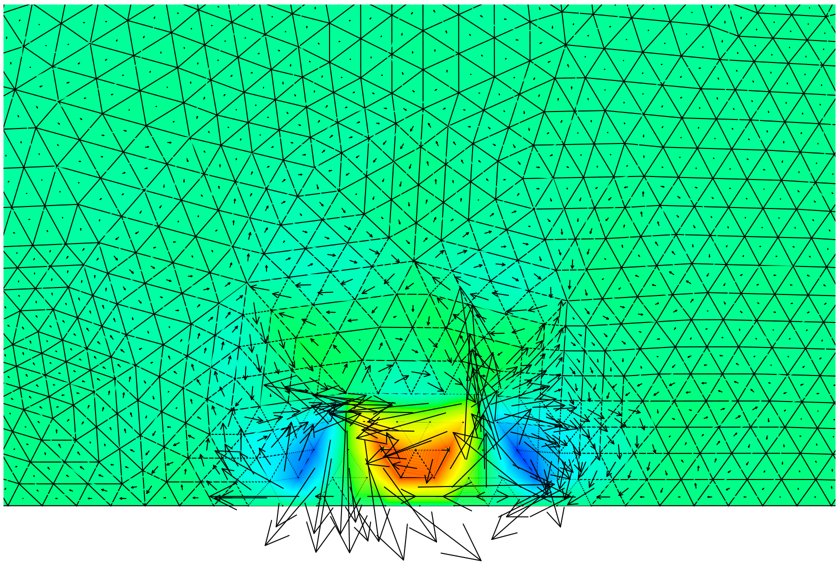


Fig. 5.4 – Un relèvement $\eta_{S,3}$ (isovaleurs) et son rotationnel (vecteurs).

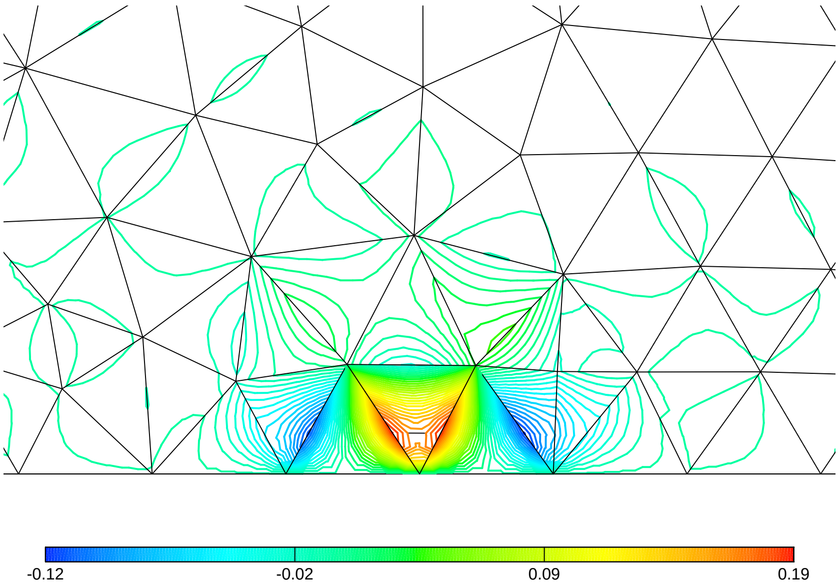


Fig. 5.5 – Relèvement $\eta_{S,3}$ sur le maillage initial (fonction souriante).

5.5 Une stabilisation qui ne marche pas

Soit $\omega_{\mathcal{T}}$ le tourbillon solution du problème discret (2.1). Comme le tourbillon est discrétisé dans $H^1_{\mathcal{T}}$, il s'écrit :

$$\omega_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i \lambda_i$$

où N_S est le nombre de sommets de la triangulation et λ_i la coordonnée barycentrique associée au $i^{\text{ème}}$ sommet de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$. On décompose alors $\omega_{\mathcal{T}}$ en supposant que l'on a d'abord numéroté les sommets intérieurs puis les sommets du bord :

$$\omega_{\mathcal{T}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_S - NS(\Gamma,\mathcal{T})} \alpha_i \lambda_i}_{\text{partie } H^1_0 \text{ de } \omega_{\mathcal{T}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{NS(\Gamma,\mathcal{T})} \alpha_i \lambda_i}_{\text{partie « vivant » au bord}}$$

(rappel : $NS(\Gamma, \mathcal{T})$ est le nombre de sommets de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}} \cap \Gamma$).

Proposition 5.5.1 *Changement de fonctions de base.*
On a $Vect\{\lambda_i\ ,\ i = 1\ ,\ N_S\} = Vect\{h_j\ ,\ j = 1\ ,\ NS(\Gamma, \mathcal{T})\} \oplus Vect\{\lambda_i\ ,\ i = 1\ ,\ N_S - NS(\Gamma, \mathcal{T})\}$ *où les* h_j, $j = 1$, N_S *sont les fonctions harmoniques discrètes définies plus haut (5.5).*

<u>Preuve</u>
Le cardinal des deux espaces étant le même, il faut démontrer que la famille des $h_j, j = 1, N_S$ est une famille libre. Soit $\mu = \sum_{i=1}^{NS(\Gamma,\mathcal{T})} \mu_i h_i = 0$, μ est bien une fonction continue puisque les h_i sont des fonctions de $H^1_{\mathcal{T}}$. On a donc $\mu(S_j) = \sum_{i=1}^{NS(\Gamma,\mathcal{T})} \mu_i h_i(S_j) = \mu_i = 0$ par définition des fonctions harmoniques discrètes « de base » et donc $\forall i = 1, NS(\Gamma, \mathcal{T})\ \ \mu_i = 0$. Les sous-espaces vectoriels engendrés par les deux familles de fonctions permettent donc la même représentation. ■

Soit $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ l'espace des fonctions harmoniques discrètes définies par (5.5). La dimension de $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ est égale à $NS(\Gamma, \mathcal{T})$. L'espace de discrétisation du tourbillon $H^1_{\mathcal{T}}$ s'écrit alors comme la somme directe de $H^1_{0,\mathcal{T}}$ et de $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$.
A l'aide de la proposition 5.5.1, on peut donc réécrire $\omega_{\mathcal{T}}$ sous la forme

$$\omega_{\mathcal{T}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_S - NS(\Gamma,\mathcal{T})} \alpha_i \lambda_i}_{= \omega_{00} \in H^1_{0,\mathcal{T}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{NS(\Gamma,\mathcal{T})} \beta_i h_i}_{= \omega_{hd} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}} .$$

Une idée possible de stabilisation est de rajouter alors dans l'espace des vitesses des fonctions de base supplémentaires. Ces fonctions sont les relèvements des fonctions harmoniques dans $H^1_0(\Omega)$ que nous avons définis à la section précédente (5.6). La formulation variationnelle discrète devient alors : $(\omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \in (W_{\mathcal{T}} = H^1_{0,\mathcal{T}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T}}) \times (X_{\mathcal{T}} \oplus \mathcal{Z}_{\mathcal{T}}) \times Y_{\mathcal{T}}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & < \tau_0, \varphi_{\mathcal{T}} > & \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ (\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (\text{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (p_{\mathcal{T}}, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - < \Pi_0, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}.\mathbf{n} > & \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \oplus \mathcal{Z}_{\mathcal{T}} \\ (\text{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) & = & 0 & \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Pour démontrer la stabilité du schéma modifié (5.8), il faut à nouveau les deux conditions inf-sup : la condition pression-vitesse (5.1) et la condition vitesse-tourbillon (5.2) et une inégalité de stabilité des relèvements harmoniques qui est la suivante :

$$\exists\ S \geq 1\ ,\ \forall \mathcal{T} \text{ triangulation régulière },\ \forall h \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}} \quad \| \nabla h \|_{0,\Omega} \leq S \| \nabla z_h \|_{0,\Omega} \tag{5.9}$$

où $z_h \in H_0^1(\Omega)$ vérifie $(\nabla z_h, \nabla \zeta) = (\nabla h, \nabla \zeta) \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 5.5.2 *La constante S, si elle existe, est forcément plus grande que 1 car on a déjà :*

$$\| \nabla z_h \|_{0,\Omega} \leq \| \nabla h \|_{0,\Omega}$$

par définition de z_h.

La seule étape qui est modifiée dans la démonstration de la stabilité est l'étape de majoration du rotationnel du tourbillon.
Décomposons $\theta_{\mathcal{T}} = \theta_{00} + \theta_{hd}$ où $\theta_{00} \in H^1_{0,\mathcal{T}}$ et $\theta_{hd} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ comme explicité plus haut.
Soit $z_{\theta_{hd}} \in H_0^1(\Omega)$ / $(\mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}, \mathbf{rot}\ \zeta) = (\mathbf{rot}\ \theta_{hd}, \mathbf{rot}\ \zeta) \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega)$.
On choisit alors $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{rot}\ \theta_{00} + \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}$ dans la deuxième équation du problème (5.8) et on obtient :

$$(\mathbf{rot}\ \theta_{00} + \mathbf{rot}\ \theta_{hd}, \mathbf{rot}\ \theta_{00} + \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}) - \underbrace{(r_{\mathcal{T}}, \mathrm{div}\ (\mathbf{rot}\ \theta_{00} + \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}))}_{=0 \text{ car div } \mathbf{rot} \equiv 0} = (\mathbf{k}, \mathbf{rot}\ \theta_{00} + \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}) + \underbrace{(l, \mathrm{div}\ (\mathbf{rot}\ \theta_{00} + \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}))}_{=0 \text{ car div } \mathbf{rot} \equiv 0}$$

$$(\mathbf{rot}\ \theta_{00}, \mathbf{rot}\ \theta_{00}) + (\mathbf{rot}\ \theta_{hd}, \mathbf{rot}\ \theta_{00}) + (\mathbf{rot}\ \theta_{00}, \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}) + (\mathbf{rot}\ \theta_{hd}, \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}) = (\mathbf{k}, \mathbf{rot}\ \theta_{00}) + (\mathbf{k}, \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}})$$

Comme $\theta_{00} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega) \quad (\mathbf{rot}\ \theta_{00}, \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}) = (\mathbf{rot}\ \theta_{00}, \mathbf{rot}\ \theta_{hd})$
et comme $\theta_{00} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \quad (\mathbf{rot}\ \theta_{hd}, \mathbf{rot}\ \theta_{00}) = 0$ par définition de $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$.
Il vient :

$$\| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|^2_{0,\Omega} + (\mathbf{rot}\ \theta_{hd}, \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}) = (\mathbf{k}, \mathbf{rot}\ \theta_{00}) + (\mathbf{k}, \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}})$$

De plus comme $z_{\theta_{hd}} \in H_0^1(\Omega) \quad (\mathbf{rot}\ \theta_{hd}, \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}}) = \| \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}} \|^2_{0,\Omega}$ donc

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}} \|^2_{0,\Omega} &\leq \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}} \|_{0,\Omega} \\
\| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}} \|^2_{0,\Omega} &\leq \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \left(\| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}} \|_{0,\Omega} \right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\| \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}} \|^2_{0,\Omega} = \| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ \theta_{hd} \|^2_{0,\Omega}$$

car $\mathbf{rot}\ \theta_{00}, \mathbf{rot}\ \theta_{hd}) = 0$ par définition de $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$. D'où l'on déduit (car $S \geq 1$)

$$\begin{aligned}
S \| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ \theta_{hd} \|^2_{0,\Omega} &\leq S \left(\| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|^2_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}} \|^2_{0,\Omega} \right) \\
&\leq S \| \mathbf{k} \|_{0,\Omega} \left(\| \mathbf{rot}\ \theta_{00} \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{rot}\ z_{\theta_{hd}} \|_{0,\Omega} \right) \quad \text{par (5.9)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\parallel \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}\parallel^2_{0,\Omega} = \frac{1}{2}\parallel \mathbf{rot}\ \theta_{00}\parallel^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\parallel \mathbf{rot}\ \theta_{hd}\parallel^2_{0,\Omega} &\leq \frac{S}{2}\parallel \mathbf{rot}\ \theta_{00}\parallel^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\parallel \mathbf{rot}\ \theta_{hd}\parallel^2_{0,\Omega}\\ \frac{1}{2}\parallel \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}\parallel^2_{0,\Omega} &\leq S\ \parallel \mathbf{k}\parallel^2_{0,\Omega},\end{aligned}$$

par utilisation de (2.12) et parce que $S \geq 1$, Donc $\parallel \mathbf{rot}\ \theta_{\mathcal{T}}\parallel^2_{0,\Omega} \leq 2S \parallel \mathbf{k}\parallel^2_{0,\Omega}$. Cette dernière majoration permet de montrer la stabilité du schéma numérique modifié mais l'hypothèse (5.9) est nécessaire pour aboutir. Or cette hypothèse est fausse dans ce cas et les essais numériques confirment que ce schéma donne des solutions fausses au problème de Bercovier-Engelman.

Contre-exemple à (5.9) :

Ce contre-exemple a été proposé par Benoît Desjardins.

Soit l'application $R : \mathcal{H}_{\mathcal{T}} \ni h \longmapsto z_h \in H^1_0(\Omega)$ où z_h est définie par le problème (5.6).

Soient $h(x,y) = x \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ et $R(h) = z_h = 0 \in H^1_0(\Omega)$ puisque

$$(\nabla h, \nabla\zeta) = \int_\Omega \frac{\partial\zeta}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \zeta.\nu_x\,\mathrm{d}\gamma \equiv 0 \quad \forall\zeta \in H^1_0(\Omega),$$

l'hypothèse (5.9) est alors mise en défaut puisque la norme L^2 de ∇h est non nulle.

Chapitre 6

Discrete harmonics for stream function-vorticity Stokes problem (article)

En collaboration avec François Dubois et Michel Salaün

Abstract
We consider the bidimensional Stokes problem for incompressible fluids in stream function-vorticity. For this problem, classical finite elements method of degree one converges only in $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ for the L^2-norm of the vorticity. We propose to use harmonic functions to approach vorticity along the boundary. Discrete harmonics are functions that are used practically to derive a new numerical method. We prove that we obtain with this numerical scheme an error of order $\mathcal{O}(h)$ for the L^2-norm of the vorticity.

Keywords : Stokes problem, mixed finite elements, harmonic functions, boundary layer.

AMS (MOS) classification : 65N30.

6.1 Introduction

6.1.1 Motivations

Let Ω be a bounded convex polygonal open set in $\mathbb{R}^2$. We denote $\Gamma = \partial\Omega$ the boundary of Ω. Modelization of the equilibrium of an incompressible and viscous fluid leads to the Navier-Stokes problem (Landau-Lifschitz [LL71]). But, when viscosity is sufficiently important or velocity of the fluid sufficiently small, we can neglect the convection terms and we obtain the stationary Stokes problem which is (in primitive variables *i.e* velocity $\mathbf{u}$ and pressure p) :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{in} \quad \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} & = & 0 & \text{in} \quad \Omega \\ \mathbf{u} & = & 0 & \text{on} \quad \Gamma \end{array}\right.$$

where ν is the kinematic viscosity and $\mathbf{f}$ a field of given external forces.

As velocity is divergence free, this two dimensional problem is often rewritten with stream function and vorticity. Velocity is the curl of some stream function and vorticity is the curl of the velocity. An usual way of discretizing the Stokes problem is to choose a finite element method with polynomials of degree one. The stream function and the vorticity are searched in $H^1(\Omega)$, but it is well known that the problem is not mathematically well posed (see for example Girault-Raviart [GR86]). Nevertheless, it can be shown that the scheme is convergent (Scholz [Sch78], [GR86]), the convergence for the L^2-norm of the vorticity is in $\sqrt{h}$, where h is the maximum diameter of triangles in the triangulation and $h^{1-\varepsilon}$ for the H^1-norm of the stream function. There exists a variational formulation of the Stokes problem which is well-posed but difficult to use numerically (Bernardi-Girault-Maday [BGM92]). We propose in this paper to study this well-posed formulation in order to obtain a numerical scheme convergent in at least $\mathcal{O}(h)$ for the L^2-norm of the vorticity. In the last part of the paper, we also give results of numerical experiments.

6.1.2 Notations

We shall consider the following spaces (see for example [Ada75]) : we denote $\mathcal{D}(\Omega)$ the space of all indefinitely differentiable functions from Ω to $\mathbb{R}$ with compact support and $L^2(\Omega)$ the space of all classes of functions which are square integrable. For any integer $m \geq 0$ and any number p satisfying $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ consists of those functions $v \in L^p(\Omega)$ for which all partial derivatives $\partial^\alpha v$ (in the distribution sense) with $|\alpha| \leq m$ belong to the space $L^p(\Omega)$:

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \;,\; \forall i \in \{1,2\} \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$W^{2,2}(\Omega) = H^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \;,\; \forall i \in \{1,2\} \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in H^1(\Omega) \right\}.$$

Symbols $\| \bullet \|_{j,\Omega}$ (respectively $|\bullet|_{j,\Omega}$) denote norms (respectively semi-norms) in Sobolev spaces $H^j(\Omega)$, $j = 1, 2$. The Sobolev space $H^1_0(\Omega)$ (respectively $H^2_0(\Omega)$) is the closure of $\mathcal{D}(\Omega)$ in the sense of the norm $\| \bullet \|_{1,\Omega}$ (respectively $\| \bullet \|_{2,\Omega}$). In all the report, $(\bullet, \bullet)$ denotes the standard inner product in $L^2(\Omega)$ and $< \bullet, \bullet >_{-1,1}$ the duality product between $H^1_0(\Omega)$ and its topological dual space $H^{-1}(\Omega)$. Finally, γ shall denote the trace operator from $H^1(\Omega)$ onto $H^{1/2}(\Gamma)$, or from $H^2(\Omega)$ onto $H^{3/2}(\Gamma)$ (see Lions-Magenes [LM68]).

6.2 The Stokes problem

Let $\mathbf{f}$ be a field of given forces and suppose that $\mathbf{f}$ belongs to $(L^2(\Omega))^2$ and $\mathrm{rot}\ \mathbf{f} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ belongs to $L^2(\Omega)$. The stationary Stokes problem consists in finding a stream function ψ and a vorticity field ω solutions of:

$$\begin{aligned} \omega + \Delta\psi &= 0 \quad \text{in } \Omega && (6.1)\\ -\Delta\omega &= \mathrm{rot}\ \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega && (6.2)\\ \psi &= 0 \quad \text{on } \Gamma && (6.3)\\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} &= 0 \quad \text{on } \Gamma. && (6.4) \end{aligned}$$

Indeed, it consists in finding a velocity field $\mathbf{u}$ that is divergence free and can be written with the help of a stream function ψ:

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}\ \psi \text{ in } \Omega.$$

Equation (6.1) means that the vorticity is the curl of the velocity. Equation (6.2) is the equilibrium equation for a viscous fluid, with kinematic viscosity equal to 1, and where convection terms are neglected. Boundary conditions (6.3) and (6.4) are consequences of

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma.$$

For more details about this problem, we refer to [GR86].

It is natural to discretize the problem (6.1)-(6.4) with a linear and continuous finite element method. As Ω is supposed to be polygonal, we exactly cover it with a mesh $\mathcal{T}$ composed of triangular finite elements. The mesh $\mathcal{T}$ is supposed to be regular (in sense defined in Ciarlet [Cia87]). The set $H^1_{\mathcal{T}}$ denotes the space of continuous functions defined on $\overline{\Omega}$, polynomial of degree 1 in each triangle of $\mathcal{T}$ and $H^1_{0,\mathcal{T}} = H^1_{\mathcal{T}} \cap H^1_0(\Omega)$:

$$H^1_{\mathcal{T}} = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\ ,\ \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\ ,\ \varphi_{|K} \in \mathbb{P}^1(K)\right\},$$

where $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ is the set of triangles in $\mathcal{T}$ and $\mathbb{P}^1$ the space of all polynomials of total degree ≤ 1. The discretization of the problem (6.1)-(6.4) consists in finding $\omega_{\mathcal{T}}$ and $\psi_{\mathcal{T}}$:

$$\psi_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}} (\text{ boundary condition (6.3) is then satisfied}) \tag{6.5}$$

$$\omega_{\mathcal{T}} \in H^1_{\mathcal{T}} \tag{6.6}$$

in the following way. We first multiply (6.1) by a scalar function $\varphi \in H^1_{\mathcal{T}}$ and integrate by parts $(\Delta\psi, \varphi)$, we obtain, taking the boundary condition (6.4) into account:

$$(\omega_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\nabla\psi_{\mathcal{T}}, \nabla\varphi) = 0 \quad \forall\varphi \in H^1_{\mathcal{T}}. \tag{6.7}$$

Then we multiply (6.2) by a test function ξ in $H^1_{0,\mathcal{T}}$, integrate by parts $-(\Delta\omega, \xi)$ and $(\mathrm{rot}\ \mathbf{f}, \xi)$ and as ξ is null on the boundary, we obtain:

$$(\nabla\omega_{\mathcal{T}}, \nabla\xi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) \quad \forall\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \tag{6.8}$$

This formulation (6.5)-(6.8) has been studied for a long time (see for example Ciarlet-Raviart [CR74], Glowinski-Pironneau [GP79], [GR86] among others). But results are not optimal. On the one hand, the continuous formulation associated is not well posed for any $\mathbf{f}$ in $(L^2(\Omega))^2$. Indeed, the Stokes problem could be seen as a biharmonic problem for the stream function :

$$\psi \in H_0^2(\Omega) \tag{6.9}$$
$$\Delta^2\psi = \text{rot } \mathbf{f}. \tag{6.10}$$

In a variational form, this problem can be rewritten as follows :

$$(\Delta\psi, \Delta\mu) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \mu) \quad \forall \mu \in H_0^2(\Omega). \tag{6.11}$$

Problem (6.11) is well posed in $H_0^2(\Omega)$ (see Ciarlet [Cia87]) but vorticity cannot be more regular than square integrable. On the other hand, it is impossible to obtain polynomial functions of degree 1 which really satisfy both boundary conditions (6.3) and (6.4) without being identically null on elements K in contact with Γ ($i.e$ $\partial K \cap \Gamma$ nor empty, nor reduced to one point). Numerically, the Neumann condition (6.4) is never verified because weakly written. Moreover, error estimates derived for this scheme are not optimal. The bound is in $h_{\mathcal{T}}^{1/2}$ for the L^2-norm of vorticity, where $h_{\mathcal{T}}$ is the maximum diameter of the elements of the triangulation [Sch78], [GR86] (see Fig.6.11 at the end of the article).

A different weak formulation was proposed by Bernardi, Girault and Maday [BGM92] in introducing space $M(\Omega) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega)\ ,\ \Delta\varphi \in H^{-1}(\Omega)\right\}$. It consists in finding (ω, ψ) in $M(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ with the following method. We test the first equation (6.1) with a function $\varphi \in M(\Omega)$ and the second one (6.2) with a function $\xi \in H_0^1(\Omega)$. It is then necessary to integrate twice by parts the term $< \Delta\psi, \varphi >_{-1,1}$ in order to include boundary conditions (6.3) and (6.4), we get

$$\left\{\begin{array}{lcll} (\omega, \varphi) + < \Delta\varphi, \psi >_{-1,1} & = & 0 & \forall \varphi \in M(\Omega) \\ < -\Delta\omega, \xi >_{-1,1} & = & (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) & \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{6.12}$$

This formulation (6.12) leads to a well-posed problem [BGM92].

Remark 6.2.1 *The space $M(\Omega)$ is an Hilbert space for the norm* $\parallel \varphi \parallel_M = \sqrt{\parallel \varphi \parallel_{0,\Omega}^2 + \parallel \Delta\varphi \parallel_{-1,\Omega}^2}$.

Proposition 6.2.2 *Sobolev space $H^1(\Omega)$ is contained in $M(\Omega)$ with continuous embedding. We have, $\parallel \varphi \parallel_M \leq \parallel \varphi \parallel_{1,\Omega}$ for all function φ in $H^1(\Omega)$. Moreover if $\varphi \in M(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, the M-norm is equivalent to the H^1-norm.*

<u>Proof</u>

First we remark that laplacian of a function in $H^1(\Omega)$ belongs to $H^{-1}(\Omega)$. Then to prove continuity of the embedding, we write the definition of the H^{-1}-norm : for all $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \parallel \Delta\varphi \parallel_{-1,\Omega} &= \sup_{\chi \in H_0^1(\Omega)} \frac{< \Delta\varphi, \chi >_{-1,1}}{|\chi|_{1,\Omega}} \\ &= \sup_{\chi \in H_0^1(\Omega)} \frac{-(\nabla\varphi, \nabla\chi)}{\parallel \nabla\chi \parallel_{0,\Omega}} \text{ because } \varphi \text{ is in } H^1(\Omega) \text{ and } \chi_{|\Gamma} = 0, \\ &\leq \parallel \nabla\varphi \parallel_{0,\Omega} \text{ (by Cauchy-Schwarz inequality).} \end{aligned}$$

So,

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad \parallel \varphi \parallel_M \leq \parallel \varphi \parallel_{1,\Omega}\ . \tag{6.13}$$

Finally, if $\varphi \in M(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, it suffices to take $\chi = \varphi$ in the last inequality we obtain $\| \varphi \|_M = \| \varphi \|_{1,\Omega}$ and the M-norm is then equivalent to the H_0^1-norm. ■

The analysis of (6.12) conducted in [BGM92] is straightforward with arguments of Brezzi [Bre74]. We introduce the kernel $\mathcal{H}(\Omega)$ of the bilinear form $< \Delta.,. >_{-1,1}$:

$$\mathcal{H}(\Omega) = \left\{ \varphi \in M(\Omega), < \Delta\varphi, \xi >_{-1,1} = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Proposition 6.2.3 *Characterization of space $\mathcal{H}(\Omega)$.*
We have

$$\mathcal{H}(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \ , \ \Delta\varphi = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \right\}$$

and there exists a trace operator (still denoted by γ) from $\mathcal{H}(\Omega)$ on $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Proof
Let $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, then $< -\Delta\varphi, \xi >_{-1,1} = 0$ for all regular function ξ in $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, *i.e* $\Delta\varphi = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Conversely, if $\Delta\varphi = 0$ in distribution sense then $\Delta\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, $< \Delta\varphi, \xi >= 0$ for all ξ in $\mathcal{D}(\Omega)$, and by density of $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$, $< \Delta\varphi, \xi >= 0$ for all ξ in $H_0^1(\Omega)$, which means that laplacian of φ is null in $H^{-1}(\Omega)$.
For the trace operator see *e.g* [LM68]. ■

So, when we restrict the first equation of (6.12) to functions in $\mathcal{H}(\Omega)$, this new problem is well posed according to Lax-Milgram's lemma [LM54]. Indeed

Proposition 6.2.4 *The L^2−scalar product:*
$\mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega) \ni (\omega, \varphi) \longmapsto \int_\Omega \omega.\varphi \mathrm{d}x \in I\!R$ *is elliptic on* $\mathcal{H}(\Omega)$.

Proof
It is obvious that for ω in $\mathcal{H}(\Omega)$, $\| \omega \|_M^2 = \| \omega \|_{0,\Omega}^2$. ■

Proposition 6.2.5 *Decomposition of space $M(\Omega)$.*
We have:

$$M(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}(\Omega).$$

Proof
We split $\varphi \in M(\Omega)$ into two parts: $\varphi = \varphi^0 + \varphi^\Delta$. One the one hand, a component φ^0 uniquely defined in $H_0^1(\Omega)$ since $\Delta\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ by the Dirichlet problem

$$\begin{cases} \Delta\varphi^0 &= \Delta\varphi \text{ in } \Omega \\ \gamma\varphi^0 &= 0 \quad \text{ on } \Gamma. \end{cases}$$

On the other hand, we define function φ^Δ by $\varphi^\Delta = \varphi - \varphi^0$, function φ^Δ verifies

$$\Delta\varphi^\Delta = 0 \qquad \text{in } \Omega,$$

so φ^Δ belongs to $\mathcal{H}(\Omega)$ and moreover

$$\gamma\varphi^\Delta = \gamma\varphi \quad \text{on } \Gamma,$$

with $\gamma\varphi$ well defined in $H^{-1/2}(\Gamma)$, see proposition (6.2.3). ■

6.3 Harmonic discretization of Stokes problem

6.3.1 Harmonic lifting

We recall that Ω being polygonal allows to recover it entirely with a mesh $\mathcal{T}$. We denote $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ the set of triangles in $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ the set of vertices of $\mathcal{T}$ and $h_{\mathcal{T}} = \sup\,(\text{diam } K \;;\; K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}})$.

Definition 6.3.1 *Family $\mathcal{U}_\sigma$ of regular meshes.*
We suppose that $\mathcal{T}$ belongs to the set $\mathcal{U}_\sigma$ of triangulations satisfying :

$$\exists \sigma > 0 \;,\; \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \;,\; \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

where $h_K = \text{diam } K$ *and* $\rho_K = \sup\,(\text{diam } S \;;\; S \text{ is a ball contained in } K)$.

We define the space $\Gamma_{\mathcal{T}}$ of all traces of functions in $H^1_{\mathcal{T}}$. Dimension of $\Gamma_{\mathcal{T}}$ is exactly the number $NS(\mathcal{T}, \Gamma)$ of vertices of the mesh $\mathcal{T}$ on the boundary Γ.

Definition 6.3.2 *Harmonic lifting.*

$$\Gamma_{\mathcal{T}} = \{\lambda : \partial\Omega = \Gamma \longrightarrow I\!R \;,\; \lambda \text{ continuous on } \Gamma, \text{ linear on each edge of the mesh } \mathcal{T} \cap \Gamma\}$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) \;,\; \exists \lambda \in \Gamma_{\mathcal{T}} \;,\; \gamma\varphi = \lambda \;,\; \Delta\varphi = 0 \text{ in } H^{-1}(\Omega)\right\}.$$

Discrete space $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ is finite dimensional and we have clearly that
$\dim \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} = \dim \Gamma_{\mathcal{T}}$. We define the following harmonic lifting operator Z_∞ :

$$Z_\infty : \Gamma_{\mathcal{T}} \ni \lambda \longmapsto Z_\infty(\lambda) \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$$

by the Dirichlet problem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta Z_\infty(\lambda) & = & 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma Z_\infty(\lambda) & = & \lambda & \text{on } \Gamma. \end{array} \right. \tag{6.14}$$

Remark 6.3.3 *It is useful to remark that $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ is included in $\mathcal{H}(\Omega) \subset M(\Omega)$.*

Definition 6.3.4 *Harmonic discretization of $H^1(\Omega)$.*
We set :

$$H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} = H^1_{0,\mathcal{T}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}. \tag{6.15}$$

Dimension of $H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ is the same as $H^1_{\mathcal{T}}$ but near the boundary, we use harmonic functions instead of piecewise linear continuous functions.

Remark 6.3.5 *The splitting $\varphi = \varphi^0 + \varphi^\Delta$ proposed in proposition 6.2.5 remains valid for functions in $H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$. Indeed, as $\varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$, $\gamma\varphi \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ then $\varphi^\Delta = Z_\infty(\gamma\varphi) \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$. By construction, $\varphi^0 = \varphi - \varphi^\Delta$ belongs to space $H^1_{0,\mathcal{T}}$.*

6.3.2 Formulation

We propose the following harmonic variational formulation of the Stokes problem :

$$\psi_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \ , \ \omega_{\mathcal{T}} \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \tag{6.16}$$

$$(\omega_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\nabla\psi_{\mathcal{T}}, \nabla\varphi) = 0 \qquad \forall\ \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \tag{6.17}$$

$$(\nabla\omega_{\mathcal{T}}, \nabla\xi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) \quad \forall\ \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \tag{6.18}$$

We recall that $H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ is included in $H^1(\Omega)$, so $\nabla\omega_{\mathcal{T}}$ is well defined. The method proposed is a natural discretization of problem (6.12) since, as it was said in remark 6.3.3, $H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ is a subset of $M(\Omega)$.

Lemma 6.3.6 *Property of* $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$.

$$\forall\varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \ , \ \forall\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \ , \ (\nabla\varphi, \nabla\xi) = 0. \tag{6.19}$$

Proof of lemma (6.3.6)
As functions in $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ are harmonic and belong to $H^1(\Omega)$, we have

$$\forall\varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \ , \ \forall\xi \in H^1_0(\Omega) \quad < -\Delta\varphi, \xi >_{-1,1} = (\nabla\varphi, \nabla\xi) = 0.$$

Finally, the previous property remains true for $\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \subset H^1_0(\Omega)$ and relation (6.19) is established. ■

Proposition 6.3.7 *Existence and uniqueness of a solution to problem (6.16)-(6.18).*
If $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, *the problem (6.16)-(6.18) has a unique solution* $(\psi_{\mathcal{T}}, \omega_{\mathcal{T}}) \in H^1_{0,\mathcal{T}} \times H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ *which depends continuously on the datum* $\mathbf{f}$.

$$\exists\ C > 0 \ \textit{independent on the mesh,} \ \ \| \omega_{\mathcal{T}} \|_M + \| \nabla\psi_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \leq C \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} \ . \tag{6.20}$$

Proof of proposition 6.3.7
We split all functions in $H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ into two parts as explicited in (6.15) and we rewrite problem (6.16)-(6.18) using such a splitting for $\omega_{\mathcal{T}} = \omega^0_{\mathcal{T}} + \omega^\Delta_{\mathcal{T}}$ and for the test function $\varphi = \varphi^0 + \varphi^\Delta$. Discrete functions $\omega^0_{\mathcal{T}}$ and $\varphi^0_{\mathcal{T}}$ belong to space $H^1_{0,\mathcal{T}}$ and $\omega^\Delta_{\mathcal{T}}, \varphi^\Delta$ to space $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \psi_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}}, \omega^0_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}}, \omega^\Delta_{\mathcal{T}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} & & & \\ (\omega^0_{\mathcal{T}}, \varphi^0) + (\omega^\Delta_{\mathcal{T}}, \varphi^0) - (\nabla\psi_{\mathcal{T}}, \nabla\varphi^0) & = & 0 & \forall\varphi^0 \in H^1_{0,\mathcal{T}} \\ (\omega^0_{\mathcal{T}}, \varphi^\Delta) + (\omega^\Delta_{\mathcal{T}}, \varphi^\Delta) - (\nabla\psi_{\mathcal{T}}, \nabla\varphi^\Delta) & = & 0 & \forall\varphi^\Delta \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \\ (\nabla\omega^0_{\mathcal{T}}, \nabla\xi) + (\nabla\omega^\Delta_{\mathcal{T}}, \nabla\xi) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) & \forall\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \end{array} \right.$$

Due to lemma 6.3.6, we obtain :

$$(\omega^0_{\mathcal{T}}, \varphi^0) + (\omega^\Delta_{\mathcal{T}}, \varphi^0) - (\nabla\psi_{\mathcal{T}}, \nabla\varphi^0) = 0 \qquad \forall\varphi^0 \in H^1_{0,\mathcal{T}} \tag{6.21}$$

$$(\omega^0_{\mathcal{T}}, \varphi^\Delta) + (\omega^\Delta_{\mathcal{T}}, \varphi^\Delta) = 0 \qquad \forall\varphi^\Delta \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \tag{6.22}$$

$$(\nabla\omega^0_{\mathcal{T}}, \nabla\xi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) \quad \forall\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \tag{6.23}$$

The way of studying problem (6.21)-(6.23) follows ideas of [GP79], Achdou, Glowinski, Pironneau [AGP92] and Ruas [Rua95].

• Problem (6.23) is well posed according to Lax-Milgram's lemma, and Poincaré's inequality. As Ω is bounded, if C_p denotes the Poincaré constant :

$$\forall \chi \in H_0^1(\Omega) \quad \| \chi \|_{0,\Omega} \leq C_p |\chi|_{1,\Omega} ,$$

there exists a unique $\omega_{\mathcal{T}}^0 \in H^1_{0,\mathcal{T}}$ satisfying (take $\xi = \omega_{\mathcal{T}}^0$ in (6.23))

$$\| \nabla \omega_{\mathcal{T}}^0 \|_{0,\Omega}^2 = \| \, \mathbf{rot} \, \omega_{\mathcal{T}}^0 \|_{0,\Omega}^2 \leq \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} \| \, \mathbf{rot} \, \omega_{\mathcal{T}}^0 \|_{0,\Omega} .$$

As the M-norm of $\omega_{\mathcal{T}}^0$ is equivalent to the H^1-norm ($\omega_{\mathcal{T}}^0 \in H_0^1(\Omega)$, see proposition 6.2.2), we obtain

$$\| \omega_{\mathcal{T}}^0 \|_M \leq \sqrt{1 + C_p^2} \, \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} . \tag{6.24}$$

• We study now equation (6.22). Function $\omega_{\mathcal{T}}^0$ is given and we also have a unique solution for unknown $\omega_{\mathcal{T}}^\Delta$ (ellipticity in proposition 6.2.4) :

$$\underbrace{(\omega_{\mathcal{T}}^\Delta, \varphi^\Delta)}_{\text{elliptic on } \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}} \quad = -(\omega_{\mathcal{T}}^0, \varphi^\Delta) \quad \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$$

which verifies (taking $\varphi^\Delta = \omega_{\mathcal{T}}^\Delta$) :

$$\| \omega_{\mathcal{T}}^\Delta \|_M = \| \omega_{\mathcal{T}}^\Delta \|_{0,\Omega} \leq \| \omega_{\mathcal{T}}^0 \|_{0,\Omega} \leq \sqrt{1 + C_p^2} \, \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} . \tag{6.25}$$

• Finally, equation (6.21) is formally identical to (6.23), so there exists (Lax-Milgram's lemma and Poincaré's inequality) $\psi_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}}$ such that

$$(\nabla \psi_{\mathcal{T}}, \nabla \varphi^0) = (\omega_{\mathcal{T}}^0, \varphi^0) + (\omega_{\mathcal{T}}^\Delta, \varphi^0) \quad \forall \varphi^0 \in H^1_{0,\mathcal{T}}.$$

$$\begin{aligned} \| \nabla \psi_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} &\leq C_p \| \omega_{\mathcal{T}}^0 \|_{0,\Omega} + C_p \| \omega_{\mathcal{T}}^\Delta \|_{0,\Omega} \\ \| \nabla \psi_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} &\leq C' \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} . \end{aligned} \tag{6.26}$$

Combining (6.24),(6.25) and (6.26) we obtain (6.20). ∎

Proposition 6.3.8 *Regularity of harmonic liftings.*
Let ε be a strictly positive real. We have :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \subset H^{2-\varepsilon}(\Omega), \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{6.27}$$

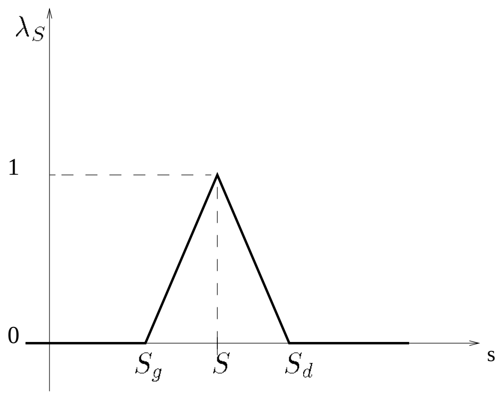


Fig. 6.1 – *A basis function.*

Proof
For S given vertex of $\mathcal{T}$ on the boundary Γ ($S \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \cap \Gamma$), a basis function λ_S of $\Gamma_{\mathcal{T}}$ is represented on fig. 6.1 where s is the curvilinear abscissa along Γ. Thus, the gradient of such a function is a combination of Heaviside functions, so belongs to $H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma)$ for any $\varepsilon > 0$ but not to $H^{1/2}(\Gamma)$ [Ada75], [LM68]. A basis function of space $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ is defined by finding $\varphi_S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that $\varphi_S \in L^2(\Omega)$, $\Delta\varphi_S = 0, \gamma\varphi_S = \lambda_S$ *i.e* $\varphi_S = Z_\infty(\lambda_S)$. Then inclusion (6.27) is thus a consequence of regularity of the laplacian operator on a convex domain [Gri85]. ■

To obtain error estimates and thus convergence, we need a result of stability (Proposition 6.3.13) and interpolation error (Proposition 6.3.12).

6.3.3 Interpolation error

Let $\Pi_{\mathcal{T}} : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1_{\mathcal{T}}$ be the Lagrange interpolation operator associated with mesh $\mathcal{T}$, and $\Pi^\Gamma_{\mathcal{T}} : H^1(\Gamma) \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{T}}$ the analogous interpolation operator on the boundary Γ. Let $h_{\mathcal{T}}$ be the maximum diameter of triangles in $\mathcal{T}$.

Proposition 6.3.9 *Properties of the interpolation operator $\Pi^\Gamma_{\mathcal{T}}$ on the boundary.*
If $\mathcal{T}$ belongs to the family $\mathcal{U}_\sigma$ of regular meshes, the interpolation operator $\Pi^\Gamma_{\mathcal{T}}$ is defined from $H^{3/2}(\Gamma)$ on $H^{1/2}(\Gamma) \cap \Gamma_{\mathcal{T}}$ and we have

$$\| \mu - \Pi^\Gamma_{\mathcal{T}}\mu \|_{1/2,\Gamma} \leq C(\sigma) h_{\mathcal{T}} \| \mu \|_{3/2,\Gamma} \qquad \forall \mu \in H^{3/2}(\Gamma). \tag{6.28}$$

We recall the needed result [LM68] :

Theorem 6.3.1 *Interpolation between Sobolev spaces.*
Let s_i and t_i be two couples of positive reals for $i = 0$ or $i = 1$ and $p \in \mathbb{R}$ such that $1 \leq p < \infty$. Let Π be an operator of $\mathcal{L}(W^{s_0,p}(\Omega); W^{t_0,p}(\Omega)) \cap \mathcal{L}(W^{s_1,p}(\Omega); W^{t_1,p}(\Omega))$ ($\mathcal{L}$ is the space of all linear and continuous functions). Then, for all $\theta \in \mathbb{R} \cap [0;1]$, operator Π belongs to the interpolate space
$\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}(W^{(1-\theta)s_0+\theta s_1,p}(\Omega); W^{(1-\theta)t_0+\theta t_1,p}(\Omega))$ and we have :

$$\| \Pi \|_{\mathcal{L}_\theta} \leq \| \Pi \|^{1-\theta}_{\mathcal{L}_0} \| \Pi \|^{\theta}_{\mathcal{L}_1} .$$

Proof of proposition 6.3.9
As $H^{3/2}(\Gamma) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Gamma})$, $\Pi^\Gamma_{\mathcal{T}}$ is well defined and moreover $\Pi^\Gamma_{\mathcal{T}}\mu \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ if $\mu \in H^{3/2}(\Gamma)$. The difference $I - \Pi^\Gamma_{\mathcal{T}}$ is continuous from $H^2(\Gamma)$ to $L^2(\Gamma)$ and its norm is bounded by $C_1(\sigma)h^2_{\mathcal{T}}$ [CR72]. It is also continuous from $H^1(\Gamma)$ to $H^1(\Gamma)$, its norm being bounded by a constant $C_2(\sigma)$. The interpolation theorem 6.3.1 concludes (with $\theta = 1/2$) that $I - \Pi^\Gamma_{\mathcal{T}}$ is continuous from $H^{3/2}(\Gamma)$ to $H^{1/2}(\Gamma)$ with its norm bounded by $\sqrt{C_1(\sigma)h^2_{\mathcal{T}}\sqrt{C_2(\sigma)}} = C'(\sigma)h_{\mathcal{T}}$.

Proposition 6.3.10 *Regularity of components of functions in $M(\Omega)$.*
Let φ be in $M(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, then φ^0 and φ^Δ (defined in proposition 6.2.5) belong to $H^2(\Omega)$.

Proof
We recall that $\varphi^0 \in H^1_0(\Omega)$ is solution of

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi^0 & = & \Delta\varphi & \text{in } \Omega \\ \gamma\varphi^0 & = & 0 & \text{on } \Gamma. \end{array} \right.$$

If φ belongs to $H^2(\Omega)$, its laplacian belongs to $L^2(\Omega)$ and by the regularity of the laplacian operator on a convex domain, φ^0 belongs to $H^2(\Omega)$ (Ω is supposed convex). By difference, $\varphi^\Delta = \varphi - \varphi^0$ belongs also to $H^2(\Omega)$. ∎

Definition 6.3.11 *Interpolation operators.*
The interpolation operator $\phi_{\mathcal{T}}^{\infty} : \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ *is defined by* $\phi_{\mathcal{T}} \varphi^\Delta = \zeta$, *where* $\zeta \in H^1(\Omega)$ *is the solution of the Dirichlet problem*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\zeta & = & 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma\zeta & = & \Pi_{\mathcal{T}}^{\Gamma}(\gamma\varphi) & \text{on } \Gamma. \end{array} \right.$$

We define the interpolation operator $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ *from* $M(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *to* $H_{\mathcal{T}}^{1,\infty} = H^1_{0,\mathcal{T}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ *by the relations:*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} : M(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ni \varphi = \varphi^0 + \varphi^\Delta \longmapsto \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\varphi = \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 + \phi_{\mathcal{T}}^{\infty}\varphi^\Delta \in H_{\mathcal{T}}^{1,\infty}.$$

Proposition 6.3.12 *Error estimates.*
For $\mathcal{T} \in \mathcal{U}_\sigma$ *(*$\sigma > 0$ *fixed), we have the following estimates:*

$$\| \varphi^0 - \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 \|_M \leq C(\sigma) h_{\mathcal{T}} \| \varphi^0 \|_{2,\Omega} \tag{6.29}$$

$$\| \varphi^\Delta - \phi_{\mathcal{T}}^{\infty}\varphi^\Delta \|_M \leq C(\sigma) h_{\mathcal{T}} \| \varphi \|_{2,\Omega} . \tag{6.30}$$

<u>Proof</u>
As $H^2(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$, we can use classical interpolation operator and we have the following interpolation error results [CR72]:

$$\| \varphi^0 - \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 \|_{1,\Omega} \leq C h_{\mathcal{T}} |\varphi^0|_{2,\Omega}.$$

But $\| \varphi^0 - \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 \|_M$ is equivalent to $\| \varphi^0 - \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 \|_{1,\Omega}$ because $\varphi^0 - \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 \in H^1_0(\Omega)$ (see proposition 6.2.2), so

$$\| \varphi^0 - \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 \|_M \leq C h_{\mathcal{T}} |\varphi^0|_{2,\Omega},$$

and relation (6.29) is established.
We now interpolate the harmonic part φ^Δ of $\varphi \in M(\Omega)$. As φ is supposed to be in $H^2(\Omega)$, its trace on Γ, $\gamma\varphi$, belongs to $H^{3/2}(\Gamma)$. Let $\lambda = \Pi_{\mathcal{T}}^{\Gamma}(\gamma\varphi)$, $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ and we have by proposition 6.3.9:

$$\| \gamma\varphi - \Pi_{\mathcal{T}}^{\Gamma}(\gamma\varphi) \|_{1/2,\Gamma} = \| \gamma\varphi - \lambda \|_{1/2,\Gamma} \leq C h_{\mathcal{T}} \| \gamma\varphi \|_{3/2,\Gamma} . \tag{6.31}$$

Let $\zeta \in H^1(\Omega)$ be such that:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\zeta & = & 0 \text{ in } \Omega \\ \gamma\zeta & = & \lambda \text{ on } \Gamma. \end{array} \right.$$

Thus (C being various constants independent on $h_{\mathcal{T}}$ but varying with σ):

$$\begin{array}{rcll} \| \varphi^\Delta - \zeta \|_M & = & \| \varphi^\Delta - \zeta \|_{0,\Omega} & \text{because } \varphi^\Delta \text{ and } \zeta \text{ are harmonic} \\ & \leq & \| \varphi^\Delta - \zeta \|_{1,\Omega} & \\ & \leq & C \| \gamma\varphi^\Delta - \gamma\zeta \|_{1/2,\Gamma} & \text{because trace controls harmonics} \\ & \leq & C \| \gamma\varphi - \lambda \|_{1/2,\Gamma} & \text{as } \gamma\varphi^\Delta = \gamma\varphi \text{ on } \Gamma \text{ and } \gamma\zeta = \lambda \\ & \leq & C h_{\mathcal{T}} \| \gamma\varphi \|_{3/2,\Gamma} & \text{by relation (6.31)} \\ & \leq & C h_{\mathcal{T}} \| \varphi \|_{2,\Omega} & \text{by continuity of the trace [LM68].} \end{array}$$

∎

6.3.4 Error estimates

We define an auxiliary problem : find $(\theta_{\mathcal{T}}, \eta_{\mathcal{T}}) \in H^1_{0,\mathcal{T}} \times H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ such that

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\theta_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\nabla \eta_{\mathcal{T}}, \nabla \varphi) & = & (g, \varphi) + < \Delta \varphi, m >_{-1,1} & \forall \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \\ (\nabla \theta_{\mathcal{T}}, \nabla \xi) & = & < l, \xi >_{-1,1} & \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \end{array} \right. \tag{6.32}$$

Proposition 6.3.13 *Stability of discrete formulation (6.16)-(6.18).*
Let $g \in M(\Omega)$, $m \in H^1_0(\Omega)$, $l \in H^{-1}(\Omega)$ and $(\theta_{\mathcal{T}}, \eta_{\mathcal{T}}) \in H^1_{0,\mathcal{T}} \times H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ be the unique solution of problem (6.32) (see proposition 6.3.7). We have stability in the following sense : there exists a constant C only dependent on $\sigma > 0$ such that the following stability inequality holds :

$$\| \theta_{\mathcal{T}} \|_M + \| \nabla \eta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \leq C \left\{ \| g \|_{0,\Omega} + \| \nabla m \|_{0,\Omega} + \| l \|_{-1,\Omega} \right\}.$$

<u>Proof</u>
As in proposition 6.3.7, three steps are required. We split each function of $H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ into two parts, $\theta_{\mathcal{T}} = \theta^0_{\mathcal{T}} + \theta^\Delta_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ and we obtain

$$(\theta^0_{\mathcal{T}}, \varphi^0) + (\theta^\Delta_{\mathcal{T}}, \varphi^0) - (\nabla \eta_{\mathcal{T}}, \nabla \varphi^0) = (g, \varphi^0) - < \Delta \varphi^0, m >_{-1,1} \forall \varphi^0 \in H^1_{0,\mathcal{T}} \tag{6.33}$$

$$(\theta^0_{\mathcal{T}}, \varphi^\Delta) + (\theta^\Delta_{\mathcal{T}}, \varphi^\Delta) = (g, \varphi^\Delta) \qquad \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty} \tag{6.34}$$

$$(\nabla \theta^0_{\mathcal{T}}, \nabla \xi) = < l, \xi >_{-1,1} \quad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \tag{6.35}$$

Notice that (as $m \in H^1_0(\Omega)$)

$$- < \Delta \varphi^0, m >_{-1,1} = (\nabla \varphi^0, \nabla m) \qquad \forall \varphi^0 \in H^1_{0,\mathcal{T}}.$$

In the following, C will denote various constants.
First step
In the last equation (6.35) we take $\xi = \theta^0_{\mathcal{T}}$, and as $\theta^0_{\mathcal{T}}$ belongs to $H^1_0(\Omega)$, we obtain

$$\begin{array}{rcl} \| \nabla \theta^0_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} & \leq & C \| l \|_{-1,\Omega} \\ \| \theta^0_{\mathcal{T}} \|_M & \leq & C \| l \|_{-1,\Omega} \end{array}$$

because of Poincaré's inequality in $H^1_0(\Omega)$ and equivalence of H^1_0-norm and $M-$norm for functions in $H^1_0(\Omega)$.
second step
In second equation (6.34), we take $\varphi^\Delta = \theta^\Delta_{\mathcal{T}}$, as $\Delta \theta^\Delta_{\mathcal{T}} = 0$ and as $\theta^0_{\mathcal{T}}$ is fixed by previous step, we obtain

$$\| \theta^\Delta_{\mathcal{T}} \|_M = \| \theta^\Delta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \leq \| g \|_{0,\Omega} + \| \theta^0_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega}$$
$$\| \theta^\Delta_{\mathcal{T}} \|_M \leq C (\| g \|_{0,\Omega} + \| l \|_{-1,\Omega}).$$

third step
Finally, in the first equation (6.33), we take $\varphi^0 = \eta_{\mathcal{T}}$ ($\theta^0_{\mathcal{T}}$ and $\theta^\Delta_{\mathcal{T}}$ are known),

$$\| \nabla \eta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} \leq C_p \left(\| \theta^0_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| \theta^\Delta_{\mathcal{T}} \|_{0,\Omega} + \| g \|_{0,\Omega} \right) + \| \nabla m \|_{0,\Omega}.$$

By combining the three steps, proposition 6.3.13 is proven. ■

Proposition 6.3.14 *Interpolation error majorates the error.*
Let (ω, ψ) be the solution of the continuous problem (6.12) and $(\omega_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathcal{T}})$ solution of (6.16)-(6.18). We have

$$\| \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_M + \| \psi - \psi_{\mathcal{T}} \|_{1,\Omega} \leq C (\| \omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}} \omega \|_M + \| \psi - \Pi_{\mathcal{T}} \psi \|_{1,\Omega}). \tag{6.36}$$

Proof

The continuous problem (6.12) can be written with a test function $\varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$ since $H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \subset M(\Omega)$ and with $\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \subset H^1_0(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega,\varphi) + < \Delta\varphi, \psi >_{-1,1} & = & 0 & \forall \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \\ < -\Delta\omega, \xi >_{-1,1} & = & (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) & \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \end{array} \right. \tag{6.37}$$

We substract (6.37) and (6.17-6.18) :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega - \omega_{\mathcal{T}},\varphi) + < \Delta\varphi, \psi >_{-1,1} + (\nabla\psi_{\mathcal{T}}, \nabla\varphi) & = & 0 & \forall \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \\ < -\Delta\omega, \xi >_{-1,1} - (\nabla\omega_{\mathcal{T}}, \nabla\xi) & = & 0 & \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \end{array} \right. \tag{6.38}$$

We introduce $\Pi_{\mathcal{T}}\psi$ interpolate of ψ on the mesh $\mathcal{T}$ and $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega$ interpolate of $\omega \in M(\Omega)$ on $\mathcal{T}$ (these interpolates, both in $H^1(\Omega)$, are defined in proposition 6.3.12).

$$\Pi_{\mathcal{T}} : H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ni \xi \longmapsto \Pi_{\mathcal{T}}\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} : M(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ni \varphi \longmapsto \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}.$$

Beginning with the first equation of problem (6.38), we add and substract $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega$ and $\Pi_{\mathcal{T}}\psi$ and we obtain :

$$\begin{array}{l} (\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \varphi) + (\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega_{\mathcal{T}}, \varphi) + < \Delta\varphi, \psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{-1,1} \\ + < \Delta\varphi, \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{-1,1} + (\nabla(\psi_{\mathcal{T}} - \Pi_{\mathcal{T}}\psi), \nabla\varphi) + (\nabla\Pi_{\mathcal{T}}\psi, \nabla\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \end{array}$$

so,

$$\begin{array}{l} (\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\nabla(\Pi_{\mathcal{T}}\psi - \psi_{\mathcal{T}}), \nabla\varphi) = -(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \varphi) \\ - < \Delta\varphi, \psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{-1,1} \underbrace{- < \Delta\varphi, \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{-1,1} - (\nabla\Pi_{\mathcal{T}}\psi, \nabla\varphi)}_{=0} \quad \forall \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \end{array}$$

Indeed, as $\Pi_{\mathcal{T}}\psi$ belongs to $H^1_0(\Omega)$, by integrating by parts, we obtain :

$$- < \Delta\varphi, \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{-1,1} = (\nabla\varphi, \nabla\Pi_{\mathcal{T}}\psi) + \underbrace{< \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}, \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{|\Gamma}}_{\substack{= \ 0 \text{ (because } \Pi_{\mathcal{T}}\psi \\ \text{is null on } \Gamma)}} \quad \forall \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \subset H^1(\Omega)$$

i.e

$$- < \Delta\varphi, \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{-1,1} - (\nabla\Pi_{\mathcal{T}}\psi, \nabla\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}.$$

The first equation becomes :

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\nabla(\Pi_{\mathcal{T}}\psi - \psi_{\mathcal{T}}), \nabla\varphi) = -(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \varphi) - < \Delta\varphi, \psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{-1,1} . \tag{6.39}$$

Using same techniques for the second equation, we obtain :

$$\begin{array}{l} < -\Delta(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega), \xi >_{-1,1} + < -\Delta\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \xi >_{-1,1} \\ -(\nabla(\omega_{\mathcal{T}} - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega), \nabla\xi) - (\nabla\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \nabla\xi) = 0 \qquad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \end{array}$$

so,

$$\begin{array}{l} (\nabla(\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega_{\mathcal{T}}), \nabla\xi) = \underbrace{(\nabla\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \nabla\xi) - < -\Delta\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \xi >_{-1,1}}_{=0} \\ - < -\Delta(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega), \xi >_{-1,1} \qquad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \end{array}$$

indeed by relation (6.19), we have:

$$(\nabla \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \nabla \xi) - < -\Delta \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \xi >_{-1,1} = 0 \quad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}$$

$$(\nabla(\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega_{\mathcal{T}}), \nabla \xi) = < \Delta(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega), \xi >_{-1,1} \ \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \tag{6.40}$$

Equations (6.39) and (6.40) lead to the following problem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega_{\mathcal{T}}, \varphi) - (\nabla(\Pi_{\mathcal{T}}\psi - \psi_{\mathcal{T}}), \nabla\varphi) & = & -(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega, \varphi) \\ & - & < \Delta\varphi, \psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi >_{-1,1} \\ & & \forall \varphi \in H^{1,\infty}_{\mathcal{T}} \\ (\nabla(\mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega_{\mathcal{T}}), \nabla\xi) & = & < \Delta(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega), \xi >_{-1,1} \\ & & \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \end{array} \right.$$

which is an auxiliary problem (6.32) previously defined with $g = \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega \in M(\Omega)$, $m = \Pi_{\mathcal{T}}\psi - \psi \in H^1_0(\Omega)$, $l = \Delta(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega) \in H^{-1}(\Omega)$.
By applying triangular inequality and proposition 6.3.13, we have:

$$\begin{aligned} \| \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_M + \| \psi - \psi_{\mathcal{T}} \|_{1,\Omega} \leq & \underbrace{\| \omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega \|_M + \| \psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi \|_{1,\Omega}}_{\text{interpolation error}} \\ & + \| \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_M + \| \Pi_{\mathcal{T}}\psi - \psi_{\mathcal{T}} \|_{1,\Omega} \\ \leq & \| \omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega \|_M + \| \psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi \|_{1,\Omega} + C \big(\| \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega - \omega \|_{0,\Omega} \\ & + \| \Delta(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega) \|_{-1,\Omega} + \| \nabla(\psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi) \|_{0,\Omega} \big) \end{aligned}$$

and finally,

$$\| \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_M + \| \psi - \psi_{\mathcal{T}} \|_{1,\Omega} \leq C(\| \omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\omega \|_M + \| \psi - \Pi_{\mathcal{T}}\psi \|_{1,\Omega}).$$

Relation (6.36) is established. ■

Inequality (6.36) with the interpolation error leads to the following

Theorem 6.3.2 *Convergence result.*
If $\mathcal{T}$ belongs to a regular family of triangulation $\mathcal{U}_\sigma$ ($\sigma > 0$), discrete problem (6.17)-(6.18) has a unique solution $(\psi_{\mathcal{T}}, \omega_{\mathcal{T}}) \in H^1_{0,\mathcal{T}} \times H^{1,\infty}_{\mathcal{T}}$, associated with a stable discretization of the Stokes problem (6.1)-(6.4). If $(\psi, \omega) \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \times H^2(\Omega)$, we have

$$\begin{aligned} & \exists\, C(\sigma) > 0, \ \forall \mathcal{T} \in \mathcal{U}_\sigma, \\ & \qquad \| \omega - \omega_{\mathcal{T}} \|_M \ + \ \| \psi - \psi_{\mathcal{T}} \|_{1,\Omega} \leq C(\sigma) h_{\mathcal{T}} (\| \omega \|_{2,\Omega} + \| \psi \|_{2,\Omega}). \end{aligned}$$

Proof

Recall that ω^0 is such that (see proposition 6.2.5):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\omega^0 & = & \Delta\omega = \mathrm{rot}\ \mathbf{f} \text{ in } \Omega \\ \gamma\omega^0 & = & 0 \quad \text{on } \Gamma. \end{array} \right.$$

As Ω is a convex polygon, and as rot $\mathbf{f}$ belongs to $L^2(\Omega)$, ω^0 belongs to $H^2(\Omega)$ [Gri85] and we have

$$\| \omega^0 \|_{2,\Omega} \leq C \| \Delta\omega \|_{0,\Omega} \leq C \| \omega \|_{2,\Omega} . \tag{6.41}$$

So, by the help of inequality (6.36) (C denotes various constants),

$$
\begin{aligned}
\| \omega \quad -\omega_{\mathcal{T}} \|_M + \| \psi - \psi_{\mathcal{T}} \|_{1,\Omega} &\leq C \left(\| \omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}} \omega \|_M + \| \psi - \Pi_{\mathcal{T}} \psi \|_{1,\Omega} \right) \\
&\leq C \left(\| \omega^0 + \omega^\Delta - \Pi_{\mathcal{T}} \omega^0_{\mathcal{T}} - \phi_{\mathcal{T}} \omega^\Delta \|_M + h_{\mathcal{T}} \| \psi \|_{2,\Omega} \right) \\
&\leq C \left(\| \omega^0 - \Pi_{\mathcal{T}} \omega^0_{\mathcal{T}} \|_M + \| \omega^\Delta - \phi_{\mathcal{T}} \omega^\Delta \|_M + h_{\mathcal{T}} \| \psi \|_{2,\Omega} \right) \\
&\leq C \left(h_{\mathcal{T}} \| \omega^0 \|_{2,\Omega} + h_{\mathcal{T}} \| \omega \|_{2,\Omega} + h_{\mathcal{T}} \| \psi \|_{2,\Omega} \right) \text{ by proposition 6.3.12} \\
&\leq C \left(h_{\mathcal{T}} \| \omega \|_{2,\Omega} + h_{\mathcal{T}} \| \omega \|_{2,\Omega} + h_{\mathcal{T}} \| \psi \|_{2,\Omega} \right) \text{ by (6.41)} \\
&\leq C h_{\mathcal{T}} \left(\| \omega \|_M + \| \psi \|_{2,\Omega} \right).
\end{aligned}
$$

■

Remark 6.3.15 • *Theorem 6.3.2 is important because it shows that using a space of harmonic functions along the boundary gives an error of order $\mathcal{O}(h_{\mathcal{T}})$ when $\omega \in H^2(\Omega)$. It is now necessary to approach this space numerically* **without losing optimality**, i.e *error between discrete harmonic functions and real harmonic functions must be bounded by $h_{\mathcal{T}}$. We propose in this paper a way of approaching $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ by use of mesh refinements but other possibilities are in progress ([Rua95]).*

- *It seems possible to reduce hypothesis on the regularity of the vorticity and to obtain convergence of order $\mathcal{O}(h_{\mathcal{T}})$ for ω only in $H^1(\Omega)$.*

6.4 Discrete harmonic functions

6.4.1 Formulation

Let $\mathcal{T} \in \mathcal{U}_\sigma$ be a given mesh. Then the family of meshes $\mathcal{T}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) is defined recursively as follows:

(i) $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$

(ii) $\mathcal{T}_{k+1} \subset \mathcal{T}_k$ is obtained from $\mathcal{T}_k$ by dividing each triangle in four homothetic ones (see fig 6.2).

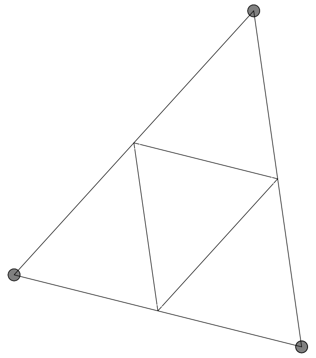


Fig. 6.2 – *Division of a triangle of $\mathcal{T}_k$.*

It is clear that $(\mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ belong to $\mathcal{U}_\sigma$ defined above. We denote $H^1_{\mathcal{T}_k}$ the space of all continuous functions on $\overline{\Omega}$, polynomial of degree 1 in each triangle of $\mathcal{T}_k$ and $H^1_{0,\mathcal{T}_k} = H^1_{\mathcal{T}_k} \cap H^1_0(\Omega)$.

Definition 6.4.1 *Discrete harmonics.*
We define $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ the space of discrete harmonic functions by:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T},k} = \left\{ \varphi \in H^1_{\mathcal{T}_k}, \exists \lambda \in \Gamma_{\mathcal{T}} \quad \gamma\varphi = \lambda \text{ on } \Gamma, (\nabla\varphi, \nabla\xi) = 0 \quad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}_k} \right\}.$$

We define the following lifting operator Z_k of order k:

$$Z_k : \Gamma_{\mathcal{T}} \ni \lambda \longmapsto Z_k(\lambda) \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$$

by the relations

$$\begin{cases} (\nabla Z_k(\lambda), \nabla\xi) &= 0 \quad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}_k} \\ \gamma Z_k(\lambda) &= \lambda \quad \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

Space $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ is finite dimensional and dim $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k} =$ dim $\Gamma_{\mathcal{T}}$. The nodal values on $\mathcal{T}_k \cap \Gamma$ are obtained by linear interpolation from values at the vertices of the initial mesh $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$. Internal values of function $Z_k(\lambda)$ are obtained by solving a discrete Laplace equation in space $H^1_{0,\mathcal{T}_k}$ with boundary values from the previous step.

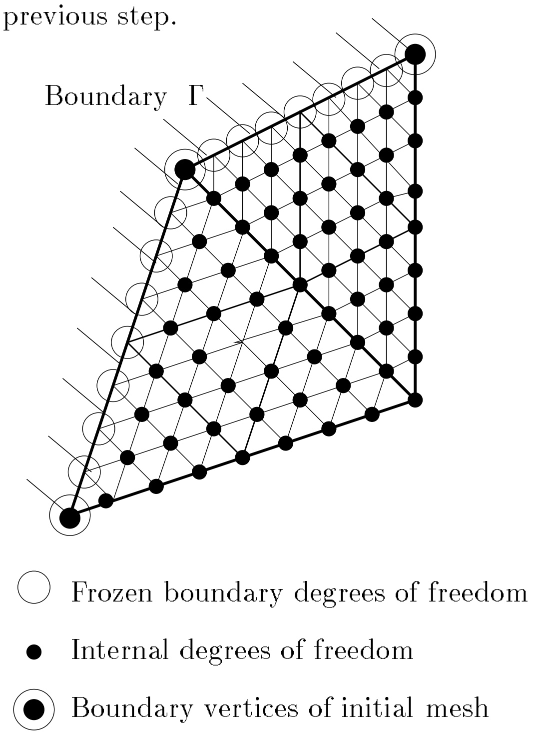


Fig. 6.3 – *Mesh for discrete harmonics at level $k = 3$.*

Proposition 6.4.2 *Continuous decomposition of space $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$.*
For all $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{T}}$, we have the following decomposition:

$$Z_k(\lambda) = Z_k(\lambda)^0 + Z_\infty(\lambda)$$

where $Z_\infty(\lambda)$ (independent on k) is defined in section (3.1) and $Z_k(\lambda)^0 \in H^1_0(\Omega)$. Moreover

$$\| \Delta Z_k(\lambda) \|_{-1,\Omega} = \| \nabla Z_k(\lambda)^0 \|_{0,\Omega} . \tag{6.42}$$

Proof

• Let $Z_\infty(\lambda) \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ such that $\gamma Z_\infty(\lambda) = \lambda$ on Γ (see problem (6.14)). So, $\gamma(Z_k(\lambda) - Z_\infty(\lambda)) = 0$ on Γ and the field $Z_k(\lambda)^0 = Z_k(\lambda) - Z_\infty(\lambda)$ belongs to $H_0^1(\Omega)$.

• We have by definition :

$$\| \Delta Z_k(\lambda) \|_{-1,\Omega} \quad = \sup_{\xi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{< \Delta Z_k(\lambda), \xi >_{-1,1}}{\| \nabla\xi \|_{0,\Omega}};$$

as $Z_k(\lambda) \in H^1(\Omega)$, we rewrite the duality product :

$$\| \Delta Z_k(\lambda) \|_{-1,\Omega} = \sup_{\xi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{(\nabla Z_k(\lambda), \nabla\xi)}{\| \nabla\xi \|_{0,\Omega}} = \sup_{\xi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{(\nabla Z_k(\lambda)^0, \nabla\xi)}{\| \nabla\xi \|_{0,\Omega}} \tag{6.43}$$

but

$$(\nabla Z_k(\lambda)^0, \nabla\xi) = (\nabla Z_k(\lambda), \nabla\xi) - \underbrace{(\nabla Z_\infty(\lambda), \nabla\xi)}_{=0} \quad \forall\xi \in H_0^1(\Omega) \text{ by lemma 6.3.6.}$$

Finally as $Z_k(\lambda)^0$ belongs to $H_0^1(\Omega)$, we can choose $\xi = Z_k(\lambda)^0$ in relation (6.43) and the equality (6.42) is established. ■

To illustrate the non-harmonic part (component $Z_k(\lambda)^0$) of functions in $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$, we made some numerical experiments. Let $\mathcal{T}$ be the mesh named A described in figure 6.5, S be a vertex of $\mathcal{S}_\mathcal{T} \cap \Gamma$ and $h_S \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},0}$ be a discrete harmonic function of level 0 used *e.g* in Glowinski-Pironneau [GP79] and defined by

$$\begin{cases} (\nabla h_S, \nabla\xi) &= 0 \qquad \forall\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \\ \quad h_S(T) &= \delta_{ST} \qquad \text{on } \Gamma \end{cases}$$

i.e $\gamma h_S = \lambda_S$ where λ_S is the corresponding basis function (see fig.6.1). The previous proposition 6.4.2 gives the following decomposition :

$$h_S = Z_0(\lambda_S)^0 + Z_\infty(\lambda_S).$$

Let $\eta_{S,k} \in H^1_{0,\mathcal{T}_k}$ be an approximation of the non harmonic part $Z_0(\lambda_S)^0$ of h_S, defined on the mesh $\mathcal{T}_k$ by :

$$\begin{cases} (\nabla\eta_{S,k}, \nabla\chi) &= (\nabla h_S, \nabla\chi) \quad \forall\chi \in H^1_{0,\mathcal{T}_k} \\ \qquad \eta_{S,k} &= 0 \qquad\qquad \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

As $Z_0(\lambda_S)^0 \in H_0^1(\Omega)$ verifies

$$(\nabla Z_0(\lambda_S)^0, \nabla\chi) = (\nabla h_S, \nabla\chi) \quad \forall\chi \in H_0^1(\Omega),$$

we have $\eta_{S,k} \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} Z_0(\lambda_S)^0$.

The complete shape of $\eta_{S,k}$ is well described, as we will prove further, after the **third** refinement ($k = 3$). The next figure (fig. 6.4) is a vizualisation of a function $\eta_{S,3}$ on the initial mesh $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$. We note that all the structure of the function (minimum value $= -0.12$, maximum value $= 0.19$) is confined inside the three triangles containing the vertex S.

Fig. 6.4 – Vizualisation of $\eta_{S,3}$ (smiling function).

Proposition 6.4.3 *Interpolation error in the family of recursive meshes.*
If $\mathcal{T}$ belongs to $\mathcal{U}_\sigma (\sigma > 0)$, let $\Pi_{\mathcal{T}}\varphi$ be the Lagrange interpolate on $\mathcal{T}$ well defined on $H^{1+\eta}(\Omega)$ for $\eta > 0$. We have

$$\forall\varepsilon \ , \ 0 < \varepsilon < 1 \ , \forall\eta \ , \ 0 < \eta < 1 - \varepsilon \ , \ \forall\varphi \in H^{2-\epsilon}(\Omega) \ , \ \exists \ \theta \in [\varepsilon, 1] \ ,$$
$$\exists \ C(\sigma, \eta, \varepsilon) > 0 / \parallel \varphi - \Pi_{\mathcal{T}}\varphi \parallel_{1,\Omega} \leq C h_{\mathcal{T}}^{1-\theta} \parallel \varphi \parallel_{2-\varepsilon,\Omega} \qquad (6.44)$$

Remark 6.4.4 *This proposition looks technical because the needed « classical » interpolation result $\parallel \varphi - \Pi_{\mathcal{T}}\varphi \parallel_{1,\Omega} \leq C h_{\mathcal{T}} \parallel \varphi \parallel_{2,\Omega}$ is not correct: functions in $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ are not in $H^2(\Omega)$ but only in $H^{2-\varepsilon}(\Omega)$ (see proposition 6.3.8).*

Proof
Because $H^{2-\epsilon}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, it is possible to define the classical interpolate of φ on the mesh $\mathcal{T}$. But φ belongs only to $H^{2-\varepsilon}(\Omega)$. We interpolate real $2 - \varepsilon$ between $(1 + \eta)$ and 2: $2 - \varepsilon = \theta(1 + \eta) + 2(1 - \theta)$ with a parameter θ such that $0 < \theta < 1$ if $1 + \eta < 2 - \varepsilon$, so θ is defined by

$$\theta = \frac{\varepsilon}{1 - \eta}. \qquad (6.45)$$

With $H^1(\Omega) \subset H^{1+\eta}(\Omega) \subset H^{2-\varepsilon}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, the difference $I - \Pi_{\mathcal{T}}$ is continuous from $H^2(\Omega)$ to $H^1(\Omega)$ with its norm bounded by $C_1(\sigma)h_{\mathcal{T}}$, $I - \Pi_{\mathcal{T}}$ is also continuous from $H^{1+\eta}(\Omega)$ to $H^1(\Omega)$ with its norm bounded by a constant $C_2(\sigma,\eta)$, so for θ chosen as in (6.45), $I - \Pi_{\mathcal{T}}$ is continuous from $H^{2-\varepsilon}(\Omega)$ to $H^1(\Omega)$, with its norm bounded by $(C_1(\sigma)h_{\mathcal{T}})^{1-\theta}(C_2(\sigma,\eta))^{\theta} = C(\sigma,\eta,\varepsilon)h_{\mathcal{T}}^{1-\theta}$:

$$\| \varphi - \Pi_{\mathcal{T}_k}\varphi \|_{1,\Omega} \leq C(\sigma,\eta,\varepsilon)h_{\mathcal{T}}^{1-\theta} \| \varphi \|_{2-\varepsilon,\Omega} .$$

■

Theorem 6.4.1 *Stability of discrete harmonics.*
Let δ be in $]0;+\infty[$. For any mesh $\mathcal{T}$ of the family $\mathcal{U}_\sigma$, there exists $K(\delta,\mathcal{T}) \in \mathbb{N}$, such that :

$$\forall k \geq K(\delta,\mathcal{T}) \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k} \quad \| \varphi \|_{0,\Omega} \geq \ \delta \, \| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega} . \tag{6.46}$$

Remark 6.4.5 *Theorem 6.4.1 means that if k is large enough ($k \geq 3$ as observed previously with the structure of functions $\eta_{S,3}$), the L^2-norm is sufficient to control the M-norm of the vorticity* i.e *the laplacian of discrete harmonic functions (which are not rigourously harmonic!) goes to zero as k becomes large enough.*

Proof

We study the quotient $\dfrac{\| \Delta\varphi \|_{-1,\Omega}}{\| \varphi \|_{0,\Omega}}$ for φ arbitrary in $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$. First, we can write $\varphi = Z_k(\lambda)$ for an arbitrary discrete boundary function $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ and we set $\rho(\lambda) = \dfrac{\| \Delta Z_k(\lambda) \|_{-1,\Omega}}{\| Z_k(\lambda) \|_{0,\Omega}}$.

• We first majorate the numerator of $\rho(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
\| \Delta Z_k(\lambda) \ \|_{-1,\Omega} \ &= \| \nabla Z_k(\lambda)^0 \|_{0,\Omega} \quad \text{by relation (6.42)} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{1+C_p^2}} \| Z_k(\lambda)^0 \|_{1,\Omega} \quad \text{where } C_p \text{ is the Poincaré's constant} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{1+C_p^2}} \| Z_\infty(\lambda) - Z_k(\lambda) \|_{1,\Omega} .
\end{aligned}$$

We have used that $Z_k(\lambda) = Z_k(\lambda)^0 + Z_\infty(\lambda)$ (see proposition 6.4.2) where $Z_k(\lambda) \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ is solution of

$$\left\{ \begin{aligned} (\nabla Z_k(\lambda), \nabla\xi) \ &= 0 \quad \forall\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}_k} \\ \gamma Z_k(\lambda) \ &= \lambda \quad \text{on } \Gamma, \end{aligned} \right.$$

and where $Z_\infty(\lambda) \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ verifies

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta Z_\infty(\lambda) \ &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \gamma Z_\infty(\lambda) \ &= \lambda \quad \text{on } \Gamma. \end{aligned} \right.$$

• Second, $Z_k(\lambda)$ is an approximation of continuous harmonic function $Z_\infty(\lambda)$ on the mesh $\mathcal{T}_k$. Céa's lemma insures that [Cia87] :

$$\| Z_\infty(\lambda) - Z_k(\lambda) \|_{1,\Omega} \ \leq \ C \, \| \Pi_{\mathcal{T}_k} Z_\infty(\lambda) - Z_\infty(\lambda) \|_{1,\Omega} .$$

We fix $\varepsilon > 0$ (independent on $\mathcal{T} \in \mathcal{U}_\sigma$). We have extended classical result of [CR72] to problems with less regularity in proposition 6.4.3, as $Z_\infty(\lambda)$ only belongs to $H^{2-\varepsilon}(\Omega)$ (see inclusion (6.27)), we choose $0 < \eta < 1 - \varepsilon$ then $\theta \geq \varepsilon$ is given by relation (6.45) and we have

$$\| \Delta Z_k(\lambda) \|_{-1,\Omega} \leq C \| Z_\infty(\lambda) - Z_k(\lambda) \|_{1,\Omega} \leq C h_k^{1-\theta} \| Z_\infty(\lambda) \|_{2-\varepsilon,\Omega}$$

where $h_k \equiv h_{\mathcal{T}_k} = \dfrac{h_{\mathcal{T}}}{2^k}$. Finally, as $\mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}$ is finite dimensional, all the norms are equivalent : so the $H^{2-\varepsilon}-$norm is equivalent to the L^2-norm (the constant involved depends on space dimension thus on $h_{\mathcal{T}}$).

$$\| \Delta Z_k(\lambda) \|_{-1,\Omega} \leq C \| Z_\infty(\lambda) - Z_k(\lambda) \|_{1,\Omega} \leq C h_k^{1-\theta} \| Z_\infty(\lambda) \|_{0,\Omega} .$$

- Third, we underestimate $\| Z_k(\lambda) \|_{0,\Omega}$,

$$\begin{aligned} \| Z_k(\lambda) \|_{0,\Omega} &\geq \| Z_\infty(\lambda) \|_{0,\Omega} - \| Z_\infty(\lambda) - Z_k(\lambda) \|_{0,\Omega} \\ \| Z_k(\lambda) \|_{0,\Omega} &\geq \| Z_\infty(\lambda) \|_{0,\Omega} - \| Z_\infty(\lambda) - Z_k(\lambda) \|_{1,\Omega} . \end{aligned}$$

So,

$$\| Z_k(\lambda) \|_{0,\Omega} \geq \| Z_\infty(\lambda) \|_{0,\Omega} - C h_k^{1-\theta} \| Z_\infty(\lambda) \|_{0,\Omega} .$$

Thus (if h_k is sufficiently small or k sufficiently large : $1 - C h_k^{1-\theta}$ is positive),

$$\rho(\lambda) = \frac{\| \Delta Z_k(\lambda) \|_{-1,\Omega}}{\| Z_k(\lambda) \|_{0,\Omega}} \leq \frac{C h_k^{1-\theta} \| Z_\infty(\lambda) \|_{0,\Omega}}{(1 - C h_k^{1-\theta}) \| Z_\infty(\lambda) \|_{0,\Omega}}$$

i.e

$$\frac{\| \Delta Z_k(\lambda) \|_{-1,\Omega}}{\| Z_k(\lambda) \|_{0,\Omega}} \leq \frac{C h_{\mathcal{T}}^{1-\theta} (2^{-k})^{1-\alpha}}{(1 - C h_{\mathcal{T}}^{1-\theta} (2^{-k})^{1-\gamma})} \leq \frac{1}{\delta}$$

which is independent on λ when $k \longrightarrow +\infty$. ■

By now, δ is taken equal to 1.

Definition 6.4.6 *Discrete harmonic formulation of the Stokes problem.*
For all mesh $\mathcal{T} \in \mathcal{U}_\sigma (\sigma > 0)$ and all integer $k \geq 0$, we set

$$H^{1,k}_{\mathcal{T}} = H^1_{0,\mathcal{T}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T}_k} .$$

The discrete harmonic formulation of the Stokes problem consists in finding :

$$\psi_{\mathcal{T},k} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \ , \ \omega_{\mathcal{T},k} \in H^{1,k}_{\mathcal{T}} \quad \text{such that} \tag{6.47}$$

$$(\omega_{\mathcal{T},k}, \varphi) - (\nabla \psi_{\mathcal{T},k}, \nabla \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in H^{1,k}_{\mathcal{T}} \tag{6.48}$$

$$(\nabla \omega_{\mathcal{T},k}, \nabla \xi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) \quad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \tag{6.49}$$

Remark 6.4.7 *Notice that ψ and ω^0 are discretized on $\mathcal{T}$ (initial mesh) and not on $\mathcal{T}_k$. Notice also that $H^1_{0,\mathcal{T}} \subset H^1_{0,\mathcal{T}_k}$ because meshes are embedded.*

This formulation coincides with (6.16)-(6.18) when $k = +\infty$, and with (6.5)-(6.8) when $k = 0$. Next proposition shows that if k is chosen sufficiently large, system (6.47)-(6.49) has a solution which depends continuously on the datum.

Proposition 6.4.8 *Existence and uniqueness of a solution to problem (6.47)-(6.49).*
If $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, if $\mathcal{T} \in \mathcal{U}_\sigma(\sigma > 0)$ and if $k \geq K(1, \mathcal{T})$, with K defined in theorem 6.4.1, the problem (6.47)-(6.49) has a unique solution $(\psi_{\mathcal{T},k}, \omega_{\mathcal{T},k}) \in H^1_{0,\mathcal{T}} \times H^{1,k}_{\mathcal{T}}$ which depends continuously on the datum $\mathbf{f}$.

$$\exists\, C > 0 \ , \quad \| \omega_{\mathcal{T},k} \|_M + \| \nabla \psi_{\mathcal{T},k} \|_{0,\Omega} \leq C \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} . \tag{6.50}$$

Proof

The proof is not different from the one of proposition 6.3.7. We first split functions of $H^1_{\mathcal{T},k}$ in a function $\varphi^{0,k}$ of $H^1_{0,\mathcal{T}}$ plus a function $\varphi^{\Delta,k}$ in $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$,

$$\varphi = \varphi^{0,k} + \varphi^{\Delta,k}.$$

We rewrite the system (6.48)-(6.49), using that each function in $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ verifies:

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k},\ (\nabla\varphi, \nabla\xi) = 0 \ \ \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \subset H^1_{0,\mathcal{T}_k}.$$

We obtain:

$$\begin{aligned}
(\omega^{0,k}_{\mathcal{T}}, \varphi^{0,k}) + (\omega^{\Delta,k}_{\mathcal{T}}, \varphi^{0,k}) - (\nabla\psi_{\mathcal{T},k}, \nabla\varphi^{0,k}) &= 0 \qquad \forall \varphi^0 \in H^1_{0,\mathcal{T}} &(6.51)\\
(\omega^{0,k}_{\mathcal{T}}, \varphi^{\Delta,k}) + (\omega^{\Delta,k}_{\mathcal{T}}, \varphi^{\Delta,k}) &= 0 \qquad \forall \varphi^\Delta \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k} &(6.52)\\
(\nabla\omega^{0,k}_{\mathcal{T}}, \nabla\xi) &= (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi)\ \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. &(6.53)
\end{aligned}$$

Notice that functions in $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ are not harmonic, so the M-norm is no more the L^2-norm. We need theorem 6.4.1 to conclude that: if $k \geq K(1, \mathcal{T})$,

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k}\ ,\ \ \| \varphi \|_M \ \ \geq \ \ \| \Delta\varphi \|_{0,\Omega}$$

so the L^2-product $(\omega^\Delta_{\mathcal{T}}, \varphi^\Delta)$ is elliptic on $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ for the $M-$norm.
Arguments in the proof of proposition 6.3.7 can be used here, and we obtain the inequality (6.50).
■

Remark 6.4.9 *Do not confuse:*

$$H^{1,k}_{\mathcal{T}} \ni \varphi = \underbrace{\varphi^0}_{\in H^1_0(\Omega)} + \underbrace{\varphi^\Delta}_{\in \mathcal{H}_{\mathcal{T},\infty}(\Omega)} = \underbrace{\varphi^{0,k}}_{\in H^1_{0,\mathcal{T}_k}} + \underbrace{\varphi^{\Delta,k}}_{\in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k}}.$$

6.4.2 Interpolation error

Proposition 6.4.10 *Interpolation error.*
Under the same assumptions as in proposition 6.3.12, there exists an interpolation operator $\phi^k_{\mathcal{T}}$ from $\mathcal{H}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ to $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ such that:

$$\| \varphi - \phi^k_{\mathcal{T}}\varphi \|_M \leq C h^{1-\theta}_{\mathcal{T}} \| \varphi \|_{2,\Omega}$$

where θ is an arbitrary real number such that $0 < \theta < 1$ and C a constant independent on k but dependent on θ.

Remark 6.4.11 *Let define $\mathcal{P}^k_{\mathcal{T}} : M(\Omega) \cap H^2(\Omega) \longrightarrow H^{1,k}_{\mathcal{T}} = H^1_{0,\mathcal{T}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$:*

$$\mathcal{P}^k_{\mathcal{T}} : M(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ni \varphi = \varphi^0 + \varphi^\Delta \longmapsto \mathcal{P}^k_{\mathcal{T}}\varphi = \Pi_{\mathcal{T}}\varphi^0 + \phi^k_{\mathcal{T}}\varphi^\Delta \in H^{1,k}_{\mathcal{T}}.$$

Proof

Let us recall that we have supposed $\varphi \in H^2(\Omega)$.
From proposition 6.3.12, $\zeta = \phi^\infty_{\mathcal{T}}\varphi^\Delta$ is an approximation of φ^Δ and verifies by definition:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\zeta &=& 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma\zeta &=& \Pi^\Gamma_{\mathcal{T}}(\gamma\varphi) & \text{on } \Gamma. \end{array} \right.$$

As $\lambda \in H^{3/2-\varepsilon}(\Gamma)$ (for all $\varepsilon > 0$), and as Ω is a convex polygon, ζ belongs to $H^{2-\varepsilon}(\Omega)$ [ADN64], [Gri85]. We can interpolate ζ on the k times refined mesh $\mathcal{T}_k$ (because $H^{2-\varepsilon}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$), we choose $\varepsilon \leq \theta$ in order to satisfy (6.45) and we obtain:

$$\| \zeta - \Pi_{\mathcal{T}_k}\zeta \|_{1,\Omega} \leq C h_k^{1-\theta} \| \zeta \|_{2-\varepsilon,\Omega} .$$

So,

$$\begin{aligned}
\| \zeta - \Pi_{\mathcal{T}_k}\zeta \|_M &\leq \| \zeta - \Pi_{\mathcal{T}_k}\zeta \|_{1,\Omega} \text{ by proposition 6.2.2,}\\
&\leq C h_k^{1-\theta} \| \zeta \|_{2-\varepsilon,\Omega}\\
&\leq C h_k^{1-\theta} \| \lambda \|_{3/2-\varepsilon,\Gamma} \text{ by continuity of the lifting,}\\
&\leq C h_k^{1-\theta} \| \gamma\varphi \|_{3/2-\varepsilon,\Gamma}\\
&\leq C h_k^{1-\theta} \| \gamma\varphi \|_{3/2,\Gamma} \text{ by continuity of the trace operator}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{from } H^{3/2-\varepsilon}(\Gamma) \text{ to } H^{3/2}(\Gamma),\\
&\leq C h_k^{1-\theta} \| \varphi \|_{2,\Omega} \text{ by continuity of the trace.}
\end{aligned}$$

Thus we define $\phi_{\mathcal{T}}^k\varphi = \Pi_{\mathcal{T}_k}\zeta = \Pi_{\mathcal{T}_k}(\phi_{\mathcal{T}}^\infty\varphi)$ and we have:

$$\begin{aligned}
\| \varphi - \phi_{\mathcal{T}}^k\varphi \|_M &= \| \varphi - \Pi_{\mathcal{T}_k}\zeta \|_M \leq \| \varphi - \phi_{\mathcal{T}}^\infty\varphi \|_M + \| \underbrace{\phi_{\mathcal{T}}^\infty\varphi}_{=\zeta} - \underbrace{\Pi_{\mathcal{T}}^k(\phi_{\mathcal{T}}^\infty\varphi)}_{=\Pi_{\mathcal{T}_k}\zeta} \|_M\\
&\leq C h_{\mathcal{T}} \| \varphi \|_{2,\Omega} + \| \zeta - \Pi_{\mathcal{T}}^k\zeta \|_M \text{ by proposition 6.3.12}\\
&\leq C h_{\mathcal{T}} \| \varphi \|_{2,\Omega} + C h_k^{1-\theta} \| \varphi \|_{2,\Omega}\\
&\leq C(h_{\mathcal{T}} + h_{\mathcal{T}}^{1-\theta}(2^{-k})^{1-\theta}) \| \varphi \|_{2,\Omega} .
\end{aligned}$$

As, $h_k \leq h_{\mathcal{T}}$, proposition 6.4.10 is proven. ■

Remark 6.4.12 *Notice that the interpolation error is independent on k when k is great enough (because $h_k \leq h_{\mathcal{T}}$). If we need k sufficiently large, it is for existence (proposition 6.4.8) and stability (proposition 6.4.13).*

6.4.3 Error estimates

Proposition 6.4.13 *Stability of problem (6.47)-(6.49).*
Let $\delta = 1$, $\mathcal{T}$ be a mesh of the regular family $\mathcal{U}_\sigma$, and $K(1,\mathcal{T})$ chosen as in theorem 6.4.1. Let $(\eta_{\mathcal{T},k}, \theta_{\mathcal{T},k}) \in H^1_{0,\mathcal{T}} \times H^{1,k}_{\mathcal{T}}$ be the solution of the auxiliary problem:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\theta_{\mathcal{T},k}, \varphi) - (\nabla\eta_{\mathcal{T},k}, \nabla\varphi) &=& (g,\varphi) + < \Delta\varphi, m >_{-1,1} & \forall \varphi \in H^{1,k}_{\mathcal{T}}\\ (\nabla\theta_{\mathcal{T},k}, \nabla\xi) &=& < l, \xi >_{-1,1} & \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \end{array} \right. \tag{6.54}$$

where $g = \mathcal{P}_{\mathcal{T}}^k\omega - \omega \in M(\Omega)$, $m = \Pi_{\mathcal{T}}\psi - \psi \in H^1_0(\Omega)$, $l = \Delta(\omega - \mathcal{P}_{\mathcal{T}}^k\omega) \in H^{-1}(\Omega)$, where $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}^k$ is the interpolation operator from $M(\Omega)$ to $\mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$ (defined in remark 6.4.11) and $\Pi_{\mathcal{T}}$ the classical interpolation operator on $\mathcal{T}$. Then, if $k \geq K(1,\mathcal{T})$, there exists a constant C independent on σ and k such that:

$$\| \theta_{\mathcal{T},k} \|_M + \| \nabla\eta_{\mathcal{T},k} \|_{0,\Omega} \leq C \left(\| g \|_{0,\Omega} + \| \nabla m \|_{0,\Omega} + \| l \|_{-1,\Omega} \right) .$$

Proof
The auxiliary problem is obtained by same techniques as in proposition 6.3.14 and arguments are identical to those in proposition 6.3.13. But for $\theta_{\mathcal{T}}^{\Delta,k} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T},k}$, the L^2-norm is no more the M-norm. We need theorem 6.4.1 to conclude that if $k \geq K(1,\mathcal{T})$,

$$\| \theta_{\mathcal{T}}^{\Delta,k} \|_{0,\Omega} \quad \geq \quad \| \Delta\theta_{\mathcal{T}}^{\Delta,k} \|_{-1,\Omega} \ .$$

■

The previous stability (proposition 6.4.13) and interpolation errors (relation 6.29 for the H_0^1-part of the vorticity and for the stream function and proposition 6.4.10 for the harmonic part) gives the following

Theorem 6.4.2 *Convergence results.*
Problem (6.48-6.49) has a unique solution $(\psi_{\mathcal{T},k}, \omega_{\mathcal{T},k}) \in H^1_{0,\mathcal{T}} \times H^{1,k}_{\mathcal{T}}$.
If $(\psi,\omega) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H^2(\Omega)$ *are solution of problem (6.12) we have*

$$\forall\theta,\ 0 < \theta < 1,\ \exists C = C(\theta) > 0\ ,\ \forall\mathcal{T} \in \mathcal{U}_\sigma,\ \exists K(1,\mathcal{T}),\ \textit{if}\ k \geq K(1,\mathcal{T})$$

$$\| \omega - \omega_{\mathcal{T},k} \|_M + \| \psi - \psi_{\mathcal{T},k} \|_{1,\Omega} \leq Ch_{\mathcal{T}}^{1-\theta}(\| \omega \|_{2,\Omega} + \| \psi \|_{2,\Omega}).$$

6.5 Numerical results

Numerical experiments have been performed on a unit square with an analytical solution (test of Bercovier-Engelman [BE79]).

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= 256\left(x^2(x-1)^2(12y-6) + y(y-1)(2y-1)(12x^2-12x+2)\right)\\
&+ (y-0.5)\\
f_2(x,y) &= -f_1(y,x)\\
\psi(x,y) &= -128(y^2(y-1)^2x^2(x-1)^2)\\
\omega(x,y) &= 256(y^2(y-1)^2(6x^2-6x+1) + x^2(x-1)^2(6y^2-6y+1)).
\end{aligned}$$

As it is said in theorem 6.4.1, K depends on the mesh, so we have worked with three different unstructured meshes obtained with EMC2, mesh generator of Modulef (Bernadou and al. [BGH+88]). Notice that structured meshes give good results without any stabilization see [DSS98], [GR86]. The uncoupled algorithm is the following :

$$\text{Find } \omega_{\mathcal{T}}^{0,k} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \text{ such that } (\nabla\omega_{\mathcal{T}}^{0,k}, \nabla\xi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) \qquad \forall\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \tag{6.55}$$

$$\text{Find } \omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}_k} \text{ such that } (\omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k}, \chi) = -(\omega_{\mathcal{T}}^{0,k}, \chi) \qquad \forall\chi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}_k} \tag{6.56}$$

$$\text{Find } \psi_{\mathcal{T},k} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \text{ such that } (\nabla\psi_{\mathcal{T},k}, \nabla\xi) = (\omega_{\mathcal{T}}^{0,k} + \omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k}, \xi) \quad \forall\xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \tag{6.57}$$

Remark 6.5.1 *It is clear that* $\omega_{\mathcal{T}}^{0,k}$ *does not depend on* k.

The longer and expensive step is the second one (6.56) where we have to calculate **all** the discrete harmonic functions (as many as edges of the initial triangulation on the boundary) **on the refined meshes**. We present the three different initial meshes used in those examples figures 6.5, 6.6 and the number of vertices of each refined meshes (tab. 6.1).

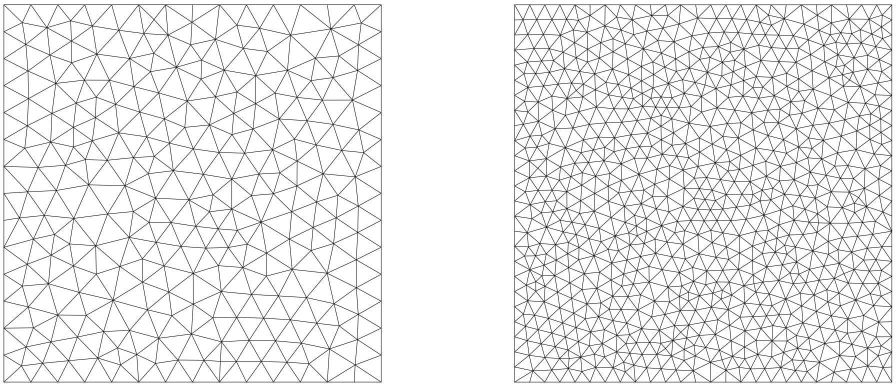


Fig. 6.5 – Meshes A and B

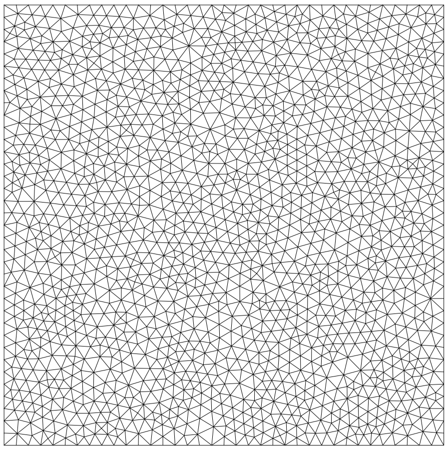


Fig. 6.6 – Mesh C

Mesh	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
A	270	1021	3969	15649	62145
B	832	3225	12697	50385	200737
C	1667	6521	25793	102593	409217

Tab. 6.1 – *Number of vertices of the k times refined meshes.*

The analytical vorticity attempts its extremum on the middle of each edges of the square and its value is then +16.00 (see fig. 6.7). In fact without any stabilization, extrema of the vorticity exploded on the boundary. Table 6.2 gives extrema of the vorticity obtained after 0 (corresponds to the non-stabilized scheme), $1, 2, 3$ and 4 refinements of the mesh (see fig. 6.7 for the values of the vorticity along the boundary). We recall that the number of discrete harmonic functions is equal to the number of vertices on the boundary. Notice that 4 refinements seem sufficient to obtain satisfying results.

Mesh	Number of discrete harmonics	$k=0$	1	2	3	4
A : 482 elements	56	26.52	20.37	17.34	16.37	16.10
B : 1562 elements	100	27.08	20.78	17.41	16.34	16.05
C : 3188 elements	144	31.77	22.94	18.20	16.60	16.15

Tab. 6.2 – *Extremum of the vorticity after k refinements.*

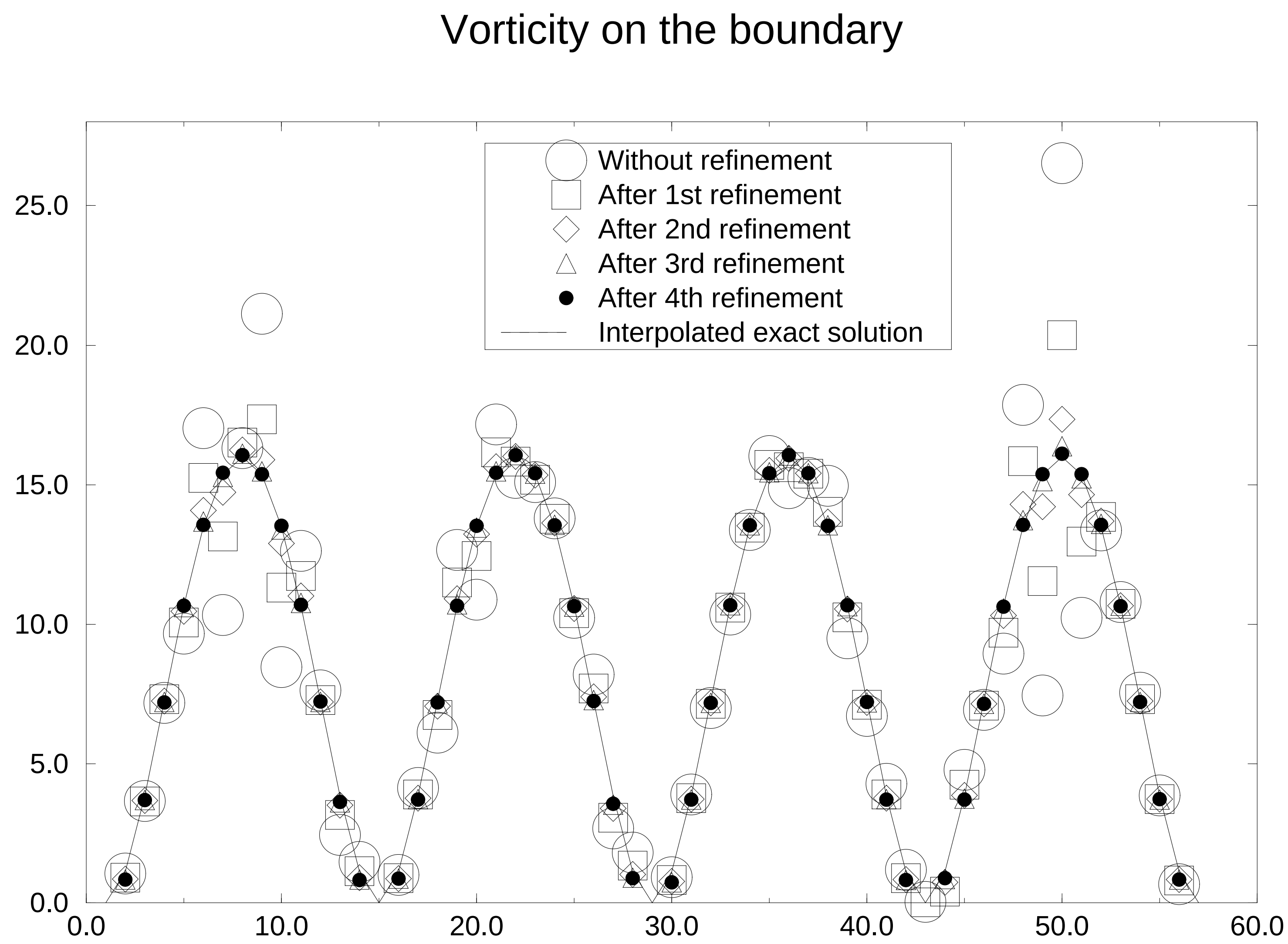


Fig. 6.7 – *Value of the vorticity on the boundary (mesh A).*

The number of necessary refinements is confirmed by figures 6.8, 6.9, 6.10. Error is no more reduced between fourth and fifth refinement, so we can estimate that $k = 4$ shall be enough and that stability of the scheme is reached.

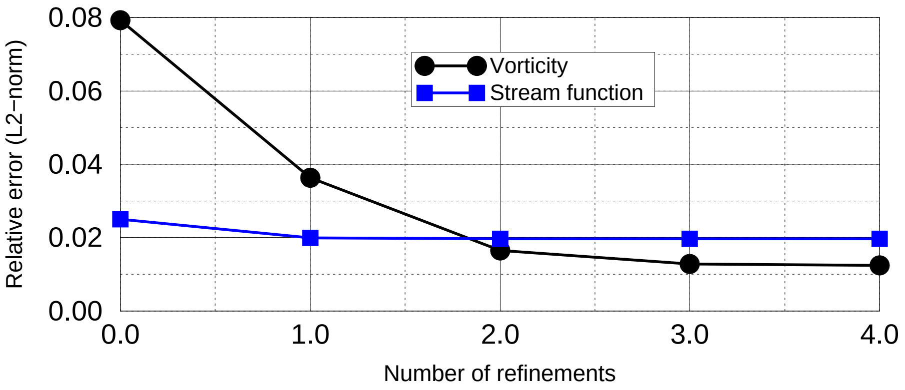


Fig. 6.8 – *Relative error in* L^2-*norm versus mesh size on mesh A.*

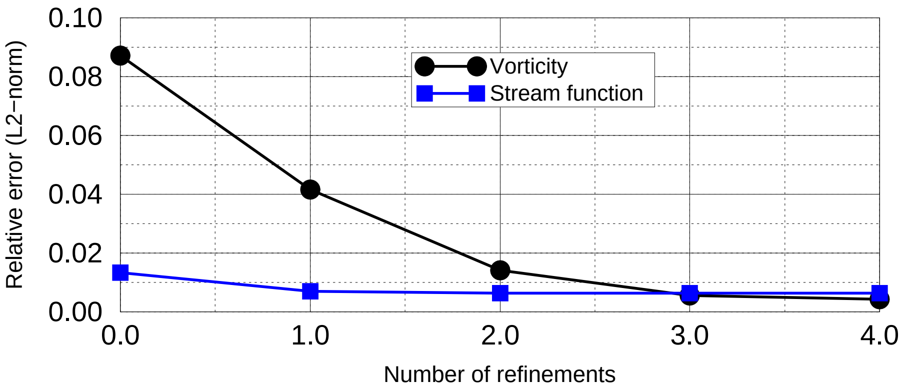


Fig. 6.9 – *Relative error in* L^2-*norm versus mesh size on mesh B.*

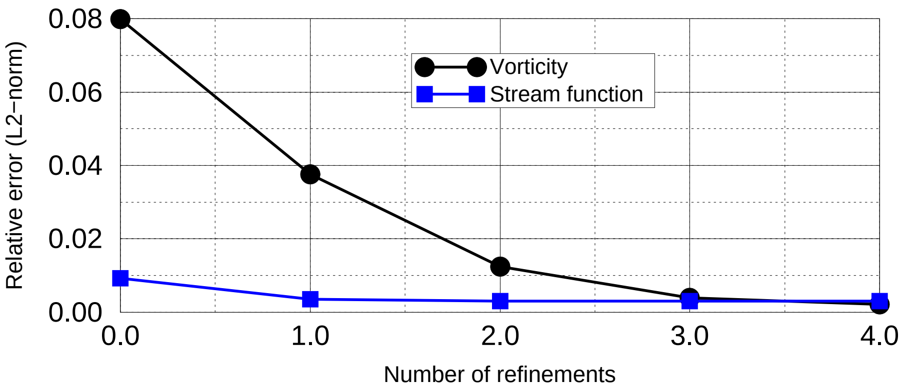


Fig. 6.10 – *Relative error in* L^2-*norm versus mesh size on mesh C.*

We recall that problem (6.5)-(6.8) is not stable and error bounds are in $h_{\mathcal{T}}^{1/2}$ for the L^2-norm of the vorticity and $h_{\mathcal{T}}^{1-\varepsilon}$ for the H^1-norm of the stream function : fig. 6.11 or [GR86]. With techniques described in this paper we obtain the following convergence order, see figure 6.12. Notice that results on figure 6.12 are better than expected : almost $\mathcal{O}(h^2)$ for the L^2-norm of the vorticity and of the stream function !

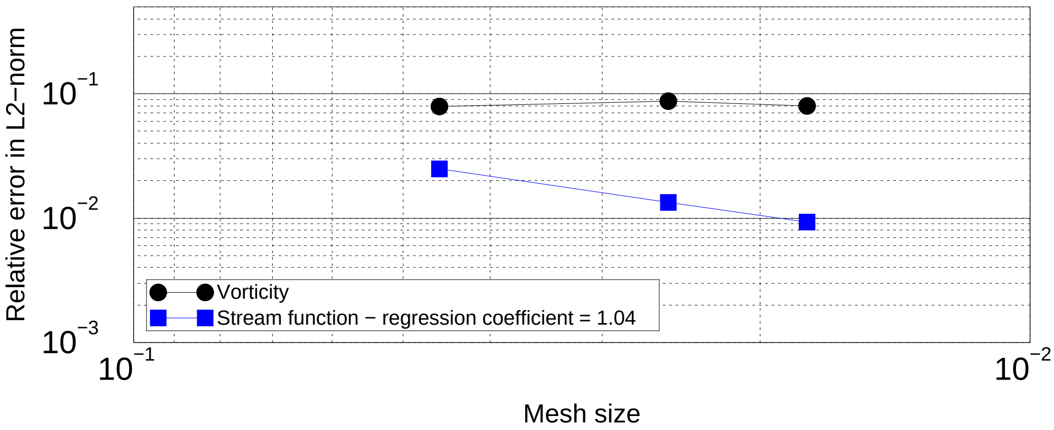


Fig. 6.11 – *Convergence order without stabilization.*

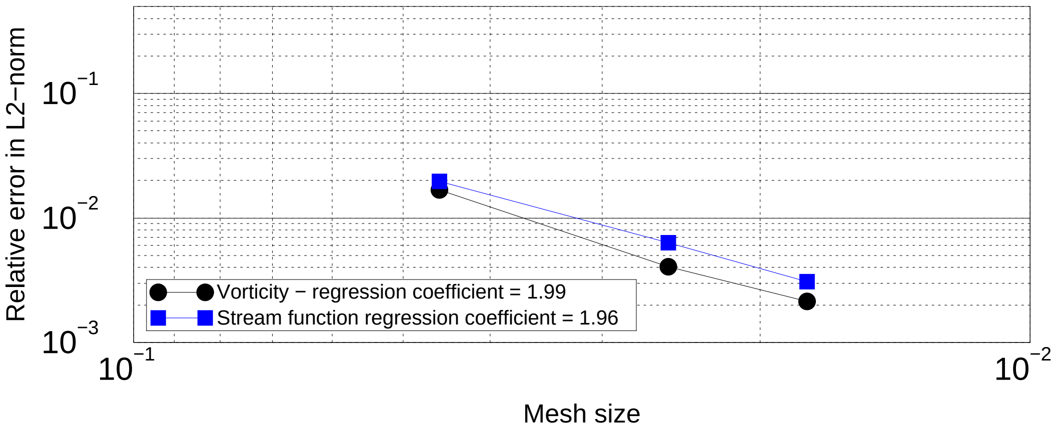


Fig. 6.12 – *Convergence order after 4 refinements.*

6.6 Conclusion

We have studied the well-posed Stokes problem in stream function and vorticity formulation. We have shown that using a space of **real** harmonic functions is sufficient to obtain convergence with better estimations than the previous ones. Second we have proposed a way of approaching numerically the space of real harmonic functions by the help of refinements of the initial mesh. We have shown theoretically that by this way we keep convergence with order 1. Numerically it seems that convergence is obtained with order 2 on the L^2-norm of the vorticity.

We are actually studying how to prove the convergence with order 2 and how using the same technique for the vorticity-velocity-pressure formulation of the Stokes problem (introduced in [Dub92]) which is an alternative in three-dimensional domain to recent work of Amara and al. [ABD99].

Acknowledgements
The authors thank Benoît Desjardins and Emmanuel Grenier for helpfull discussions during summer 1998.

Chapitre 7

Fonctions harmoniques discrètes pour le problème de Stokes en formulation tourbillon-vitesse-pression

Comme on l'a vu au chapitre 2, la formulation tourbillon-vitesse-pression est une généralisation de la formulation fonction courant-tourbillon. Le filtrage des oscillations à l'aide des fonctions harmoniques discrètes vu au chapitre précédent peut donc être appliqué à la nouvelle formulation.

7.1 Une première vérification

Toujours d'après le chapitre 2, la formulation tourbillon-vitesse-pression est stable si on impose le tourbillon au même endroit que la vitesse normale (hypothèse $\Gamma_\omega = \Gamma_n$). Dans un premier temps nous allons utiliser cette remarque pour approcher correctement la pression.

Comme le tourbillon calculé par la formulation classique (fonction courant-tourbillon : code « PSIOM ») et le tourbillon calculé par le code « OMEGA » en tourbillon-vitesse-pression sur un même maillage sont identiques, nous allons imposer comme condition limite sur le tourbillon dans « OMEGA » les valeurs calculées par « PSIOM » avec la méthode du chapitre 6. Au vu de la sensibilité de la pression à la précision du tourbillon, cette méthode permet de vérifier que le tourbillon est bien calculé par la méthode précédente.
On commence par calculer le tourbillon par la méthode exposée au chapitre 6 :

$$\begin{array}{lrcll} \text{Trouver } \omega_{\mathcal{T}}^{0,k} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \text{ tel que} & (\nabla\omega_{\mathcal{T}}^{0,k}, \nabla\xi) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) & \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \\ \text{Trouver } \omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}_k} \text{ tel que} & (\omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k}, \chi) & = & -(\omega_{\mathcal{T}}^{0,k}, \chi) & \forall \chi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}_k}. \end{array}$$

Puis on calcule les autres champs (vitesse et pression) par la formulation tourbillon-vitesse-pression avec les conditions limites de Dirichlet en vitesse normale et en tourbillon suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \omega & = & \omega_{\text{calculé}} \ \text{ sur } \Gamma, \\ \mathbf{u.n} & = & 0 \qquad \text{sur } \Gamma(\text{ ce qui revient à dire que } \mathbf{u} \text{ est cherché dans } H_0(\text{div}, \Omega)). \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & < \omega_{\text{calculé}}, \varphi_{\mathcal{T}} > & \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \nu(\text{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (p_{\mathcal{T}}, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\text{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) & = & 0 & \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}} \end{array} \right.$$

Comme $\Gamma_\omega = \Gamma_n = \Gamma$, la méthode est numériquement stable, voir la proposition (2.5.1).

On présente, figures 7.2 à 7.6, les résultats obtenus sur le tourbillon et la pression après chaque étape de raffinement du maillage B (*cf* chapitre6 6.5). On peut remarquer que bien que les isovaleurs du tourbillon après 3 et 4 raffinements semblent proches, la différence sur la pression est notable. On rappelle en figure (7.7) l'allure de la pression exacte interpolée sur le maillage initial.

k	Minimum	Maximum
0	-7.67	6.43
1	-3.76	3.31
2	-1.23	1.09
3	-0.34	0.28
4	-0.28	0.29

Tab. 7.1 – *Extrema de la pression après k raffinements (rappel: solution analytique* -0.25 *à* 0.25*).*

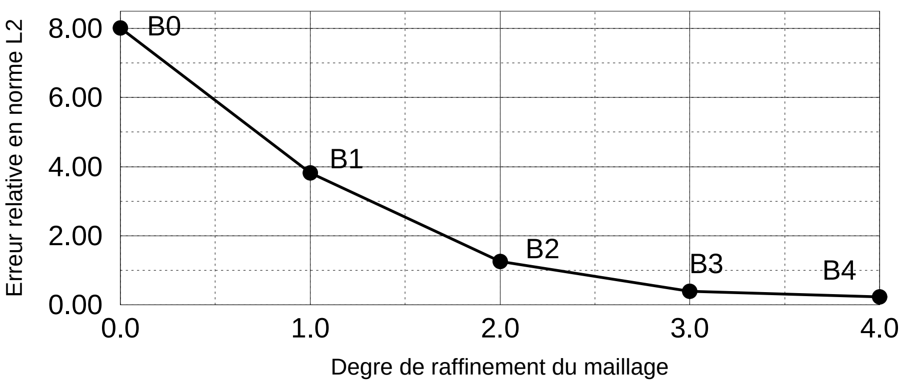


Fig. 7.1 – *Erreur relative en norme L^2 de la pression en fonction du degré de raffinement.*

Le tableau 7.1 confirme que quatre raffinements du maillage initial pour calculer le tourbillon sont nécessaires pour obtenir une précision satisfaisante sur la pression. La figure 7.1 montre l'évolution de l'erreur relative en norme L^2 lors du raffinement d'un maillage.

On présente ensuite la courbe de convergence de l'erreur sur la pression (7.9) obtenue sur trois maillages différents (A, B, C voir chapitre 6 : figures 6.5 et 6.6, les résultats précédents concernent le maillage B) raffinés chacun quatre fois pour le calcul du tourbillon. On remarque alors que la pression converge encore une fois avec un ordre supérieur à 1 (on rappelle que sans stabilisation, la pression ne converge pas (courbe 2.19) !). La figure (7.8) représente la pression obtenue respectivement sur le maillage A et C avec le tourbillon calculée sur A raffiné quatre fois (respectivement C raffiné quatre fois).

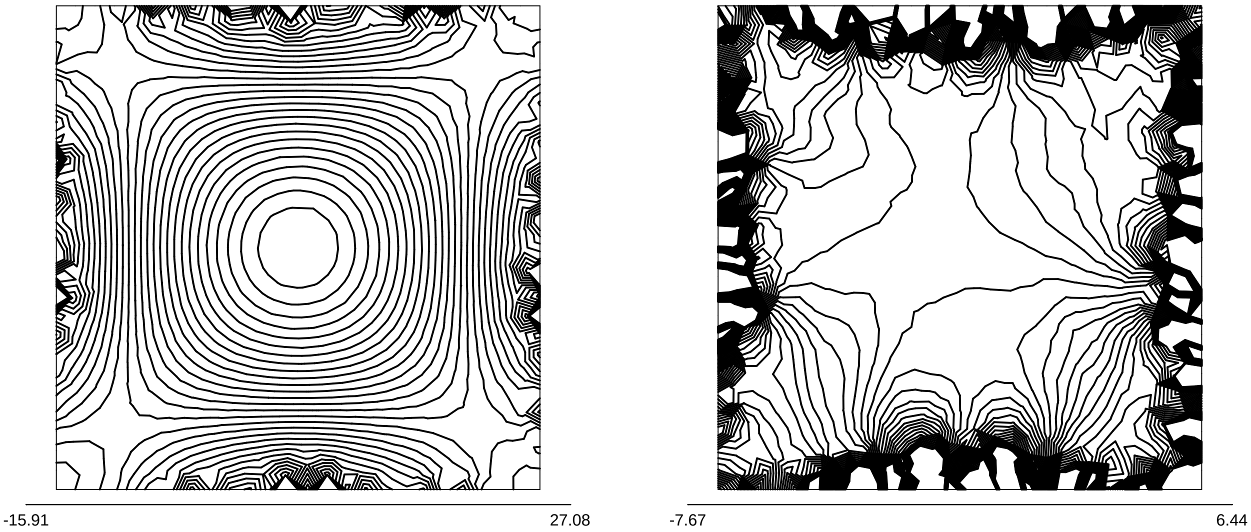


Fig. 7.2 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré B de référence (sans raffinement).

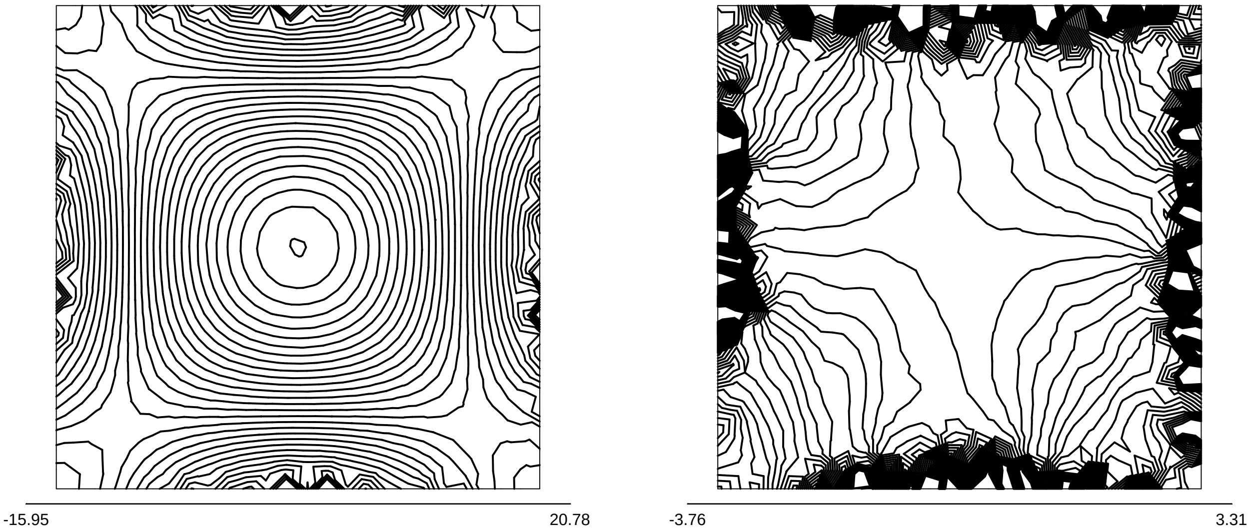


Fig. 7.3 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré B de référence (1 raffinement).

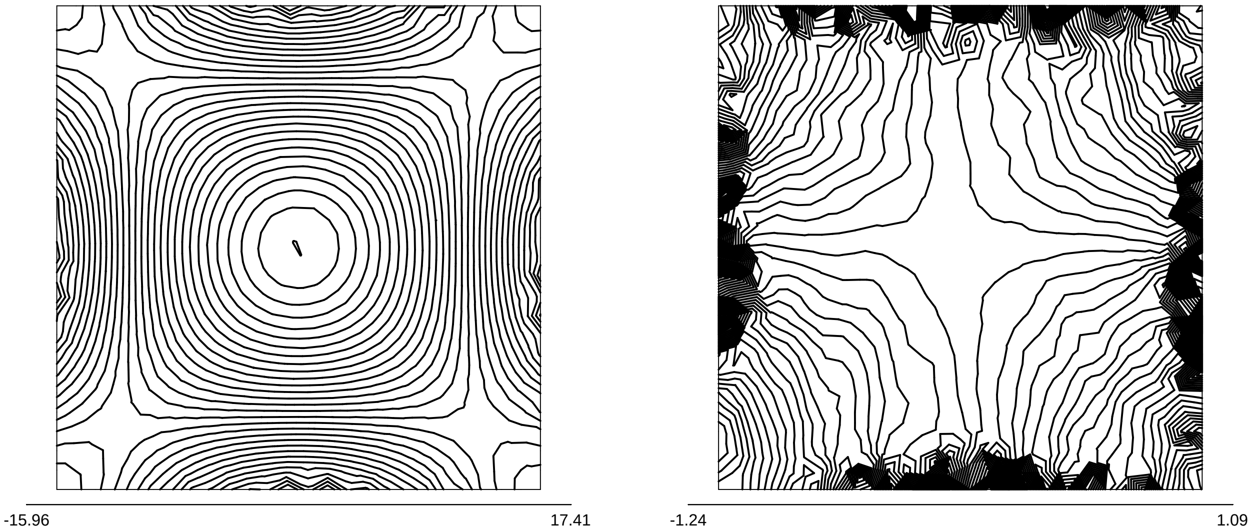


Fig. 7.4 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré B de référence (2 raffinements).

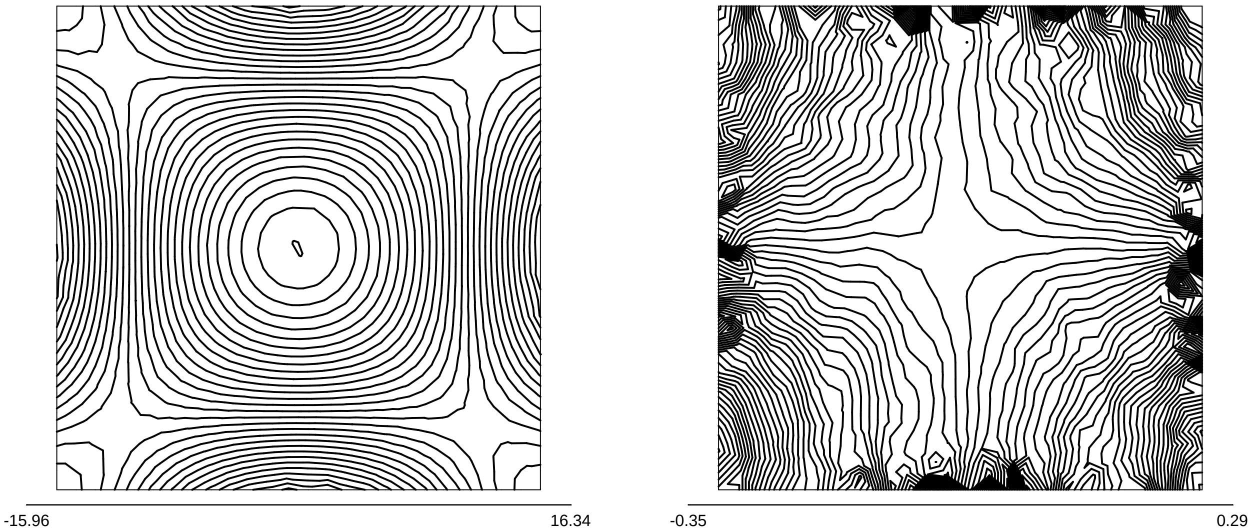


Fig. 7.5 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré B de référence (3 raffinements).

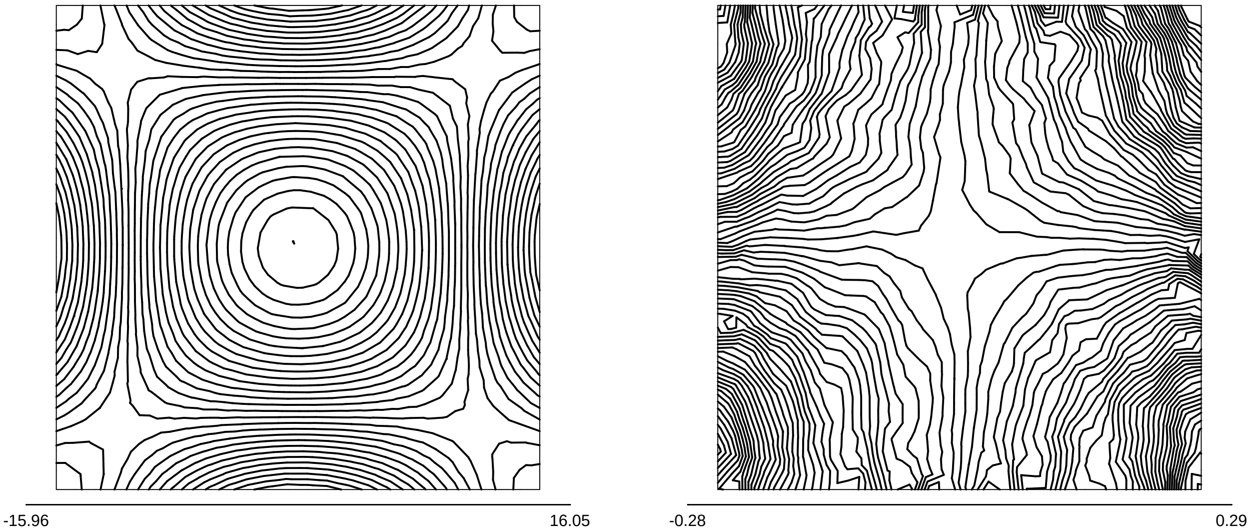


Fig. 7.6 – Isovaleurs du tourbillon et de la pression sur le maillage non structuré B de référence (4 raffinements).

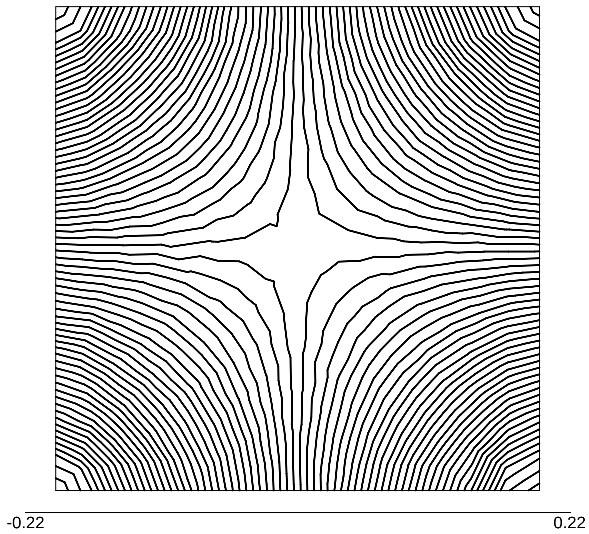


Fig. 7.7 – Isovaleurs de la pression exacte interpolée sur le maillage non structuré B.

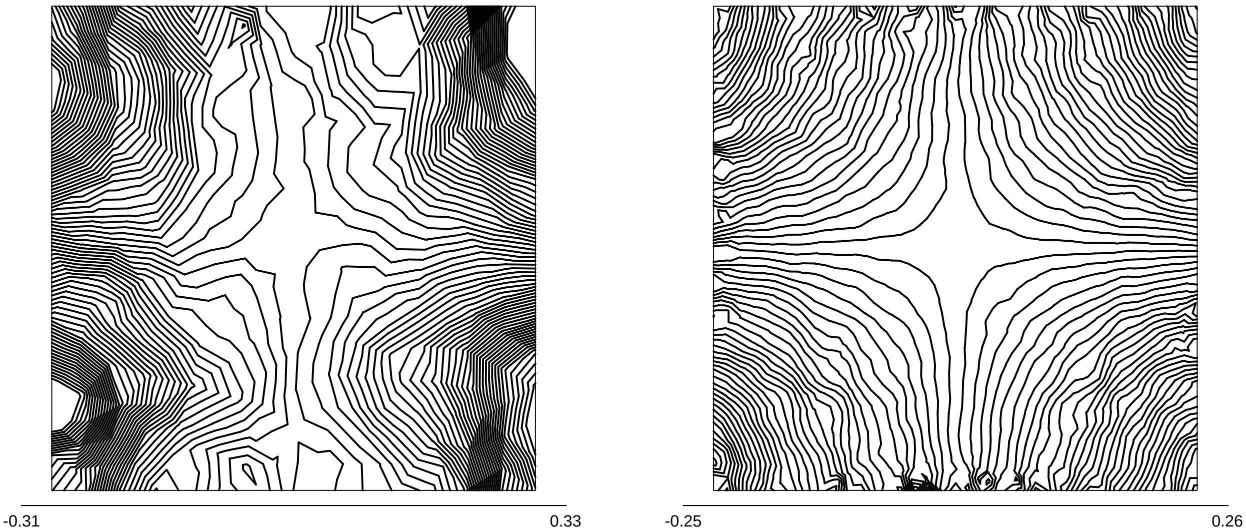


Fig. 7.8 – Isovaleurs de la pression sur le maillage A et le maillage C avec le tourbillon calculé sur les maillages $A4$ et $C4$.

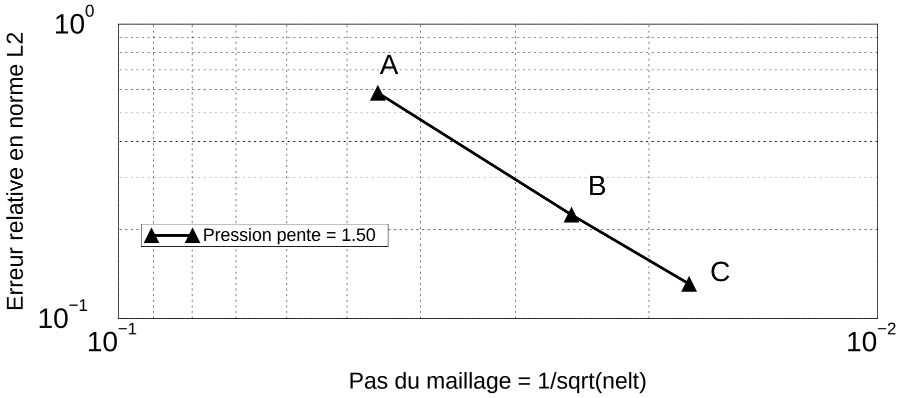


Fig. 7.9 – *Convergence de la pression sur trois maillages différents, à partir du tourbillon calculé sur les maillages raffinés chacun 4 fois.*

7.2 Calcul rigoureux de la pression

On reprend l'algorithme découplé présenté au chapitre 6 (6.55-6.57) pour calculer le tourbillon et la vitesse :

$$\begin{aligned}
\text{Trouver } \omega_{\mathcal{T}}^{0,k} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \text{ tel que } (\nabla\omega_{\mathcal{T}}^{0,k}, \nabla\xi) &= (\mathbf{f}, \mathbf{rot}\ \xi) \qquad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}} \\
\text{Trouver } \omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}_k} \text{ tel que } \quad (\omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta,k}, \chi) &= -(\omega_{\mathcal{T}}^{0}, \chi) \qquad \forall \chi \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}_k} \\
\text{Trouver } \psi_{\mathcal{T},k} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \text{ tel que } (\nabla\psi_{\mathcal{T},k}, \nabla\xi) &= (\omega_{\mathcal{T}}^{0} + \omega_{\mathcal{T},k}^{\Delta}, \xi) \quad \forall \xi \in H^1_{0,\mathcal{T}}.
\end{aligned}$$

Le tourbillon $\omega_{\mathcal{T}}$ et la vitesse $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \mathbf{rot}\ \psi_{\mathcal{T}}$ étant donnés par ces deux étapes, on obtient la pression par un post-traitement différent de celui classique présenté en annexe du chapitre 3. Ce nouveau post-traitement consiste à réécrire le système discret en tourbillon-vitesse-pression présenté au chapitre 2 avec le tourbillon et la vitesse comme données. Etant donnés $\omega_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T}_k}$, $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in$

$X_{\mathcal{T}_k}$, on cherche $p_\mathcal{T} \in Y_\mathcal{T}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\omega_{\mathcal{T}_k}, \varphi_\mathcal{T}) - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}_\mathbf{k}}, \mathbf{rot}\ \varphi_\mathcal{T}) & = & <\omega_{\mathcal{T}_k}, \varphi_\mathcal{T}> & \forall\ \varphi_\mathcal{T} \in W_\mathcal{T} \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}_k}, \mathbf{v}_\mathcal{T}) + \nu(\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}_\mathbf{k}}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) - (p_\mathcal{T}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\mathcal{T}) & \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T} \in X_\mathcal{T} \\ (\mathrm{div}\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}_\mathbf{k}}, q_\mathcal{T}) & = & 0 & \forall\ q_\mathcal{T} \in Y_\mathcal{T} \end{array} \right.$$

Remarque 7.2.1 *Dans le paragraphe précédent, il faut noter que l'on n'utilise que très peu d'informations sur le tourbillon. En effet, on connaît complètement le tourbillon sur le maillage raffiné et on n'utilise que les valeurs au bord sur le maillage initial. Pour être rigoureux, il faut résoudre le système précédent dont le point délicat est le calcul des interactions entre les inconnues sur le maillage initial et les données vitesse et tourbillon sur le maillage raffiné.*

Mais le système précédent revient en fait à chercher $p_\mathcal{T} \in Y_\mathcal{T}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (p_\mathcal{T}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) & = & (-\mathbf{f} + \nu \mathbf{rot}\ \omega_{\mathcal{T}_k}, \mathbf{v}_\mathcal{T}) \quad \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T} \in X_\mathcal{T} \text{ à divergence non nulle.} \end{array} \right. \tag{7.1}$$

Ce problème ne nécessite aucune condition limite particulière sur la pression. La pression est alors cherchée dans $L^2_0(\Omega)$ et constante par triangle.
Notons : N_E le nombre d'éléments de la triangulation, N_S le nombre de sommets, $NS(\mathcal{T}, \Gamma)$ le nombre de sommets frontières ($\in \mathcal{T} \cap \Gamma$), N_A le nombre d'arêtes des triangles, $NA(\mathcal{T}, \Gamma)$ le nombre d'arêtes au bord.

D'une part, on a $N_E - 1$ inconnues sur la pression. D'autre part le nombre de fonctions de Raviart-Thomas est $N_A - NA(\mathcal{T}, \Gamma)$ ($NA(\mathcal{T}, \Gamma)$ est le nombre de conditions limites sur la vitesse), parmi celles-ci, il y en a $N_S - NS(\mathcal{T}, \Gamma)$ qui sont à divergence nulle, donc $N_A - NA(\mathcal{T}, \Gamma) - N_S + NS(\mathcal{T}, \Gamma)$ fonctions sont à divergence non nulle. D'après la relation d'Euler, $N_S - N_A + N_E = 1$ (pour un domaine convexe) et comme $NA(\mathcal{T}, \Gamma) = NS(\mathcal{T}, \Gamma)$ (domaine fermé) on a :

$$N_A - NA(\mathcal{T}, \Gamma) - N_S + NS(\mathcal{T}, \Gamma) = N_E - 1.$$

On a donc autant de fonctions tests que d'inconnues, le système est carré.

Proposition 7.2.2 *Le problème (7.1) est bien posé.*

Preuve
Pour montrer que (7.1) est bien posé, il suffit de montrer que :

$$(p_\mathcal{T}, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_\mathcal{T}) = 0 \ \ \forall\ \mathbf{v}_\mathcal{T} \in X_\mathcal{T} \text{ à divergence non nulle} \Longrightarrow p_\mathcal{T} = 0.$$

On rappelle que la condition inf-sup discrète (2.2) signifie que pour tout $q_\mathcal{T}$ dans $Y_\mathcal{T}$, il existe une fonction $\mathbf{w}_\mathcal{T}$ dans $X_\mathcal{T}$ telle que div $\mathbf{w}_\mathcal{T} = q_\mathcal{T}$. En prenant $\mathbf{v}_\mathcal{T} = \mathbf{w}_\mathcal{T}$ dans l'équation avec $\mathbf{w}_\mathcal{T}$ telle que div $\mathbf{w}_\mathcal{T} = p_\mathcal{T}$, on obtient :

$$\| p_\mathcal{T} \|^2_{0,\Omega} = 0, \text{ soit } p_\mathcal{T} = 0.$$

■

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié une nouvelle formulation du problème de Stokes. Construite pour étendre la méthode MAC à des triangulations quelconques, elle fait intervenir trois champs : le tourbillon, la vitesse et la pression.

Nous montrons alors que la formulation tourbillon-vitesse-pression $(\omega, \mathbf{u}, p)$ contient la formulation classique en fonction courant-tourbillon (ψ, ω) et permet la prise en compte de conditions limites plus générales. L'inconvénient majeur de cette remarque est que l'instabilité numérique bien connue de la formulation fonction courant-tourbillon s'oppose au succès de la formulation tourbillon-vitesse-pression.

Nous avons ensuite approfondi l'étude de l'instabilité de la formulation fonction courant-tourbillon qui débouche sur le besoin d'une prise en compte correcte des fonctions harmoniques discrètes. Ainsi nous proposons une méthode préliminaire qui résout l'instabilité numérique de la formulation (ψ, ω) du problème de Stokes et améliore les précédents résultats de convergence connus du (ψ, ω). Il faut préciser qu'une fois stabilisée la formulation $(\omega, \mathbf{u}, p)$ donne un nouveau post-traitement de la pression qui s'avère numériquement convergent.

Plusieurs points sont encore à l'étude :

- la convergence anormalement bonne de la pression (ordre 1.5 alors que l'erreur d'interpolation est d'ordre 1) dès que la formulation est stabilisée,
- la formulation en trois dimensions car le travail effectué ici en deux dimensions a permis de voir que la formulation $(\omega, \mathbf{u}, p)$ introduite par François Dubois n'est pas posée dans les bons espaces fonctionnels pour le tourbillon.

Enfin il est nécessaire d'étudier tant théoriquement que numériquement la formulation $(\omega, \mathbf{u}, p)$ pour l'équation de Navier-Stokes.

Annexe A

Décomposition d'erreur à l'aide de couches limites numériques

Cette partie est un travail mené en collaboration avec Benoît Desjardins et Emmanuel Grenier.

L'idée dans cette partie est d'adapter les outils de développements asymptotiques utilisés pour l'étude des couches limites à l'étude de l'erreur numérique ("couches limites numériques").

On s'intéresse à la décomposition suivante des inconnues fonction courant et tourbillon, $\Pi^1_{\mathcal{T}}$ est l'opérateur d'interpolation de Lagrange ([Cia87]) sur le maillage $\mathcal{T}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \psi_{\mathcal{T}} \\ \omega_{\mathcal{T}} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{solution} \\ \text{du problème} \\ \text{discret}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Pi^1_{\mathcal{T}}\psi \\ \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \end{pmatrix}}_{\substack{\text{interpolée} \\ \text{de la solution} \\ \text{exacte}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \psi^i_{\mathcal{T}} \\ \omega^i_{\mathcal{T}} \end{pmatrix}}_{\text{erreur intérieure}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \psi^b_{\mathcal{T}} \\ \omega^b_{\mathcal{T}} \end{pmatrix}}_{\text{erreur au bord}}$$

où $\psi^i_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}}(\Omega), \omega^i_{\mathcal{T}} \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ vérifient le système

$$\begin{cases} (\omega^i_{\mathcal{T}}, \mu) - (\mathbf{rot}\ \psi^i_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \mu) & = & 0 & \forall\ \mu \in H^1_{\mathcal{T}}, \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega^i_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi) & = & (\mathbf{f} - \nu\ \mathbf{rot}\ \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega, \mathbf{rot}\ \varphi) & \forall\ \varphi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \end{cases}$$

et $\psi^b_{\mathcal{T}} \in H^1_{0,\mathcal{T}}(\Omega), \omega^b_{\mathcal{T}} \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$

$$\begin{cases} (\omega^b_{\mathcal{T}}, \mu) - (\mathbf{rot}\ \psi^b_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\mu) & = & -(\Pi^1_{\mathcal{T}}\omega, \mu) + (\mathbf{rot}\ \Pi^1_{\mathcal{T}}\psi, \mathbf{rot}\ \mu) & \forall\ \mu \in H^1_{\mathcal{T}}, \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega^b_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi) & = & 0 & \forall\ \varphi \in H^1_{0,\mathcal{T}}. \end{cases}$$

Le second membre de la première équation du problème que résout l'erreur au bord peut sembler étrange puisque cette équation contient des degrés de liberté portés par des noeuds internes et non pas seulement par des noeuds du bord. Mais comme :

$$(\omega, \mu) - (\mathbf{rot}\ \psi, \mathbf{rot}\mu) \quad = \quad < \frac{\partial \psi}{\partial n}, \mu > \ \ \forall\ \mu \in H^1(\Omega)$$

formellement le terme $-(\Pi^1_{\mathcal{T}}\omega, \mu) + (\mathbf{rot}\ \Pi^1_{\mathcal{T}}\psi, \mathbf{rot}\ \mu)$ est homogène à la dérivée normale de la fonction courant et est donc bien un terme de bord.

Remarque A.0.3 *Les problèmes que résolvent les deux parties de l'erreur ont été trouvés par tatônnements. Cette version est la seule qui sépare effectivement erreur intérieure et erreur au bord (voir figures).*

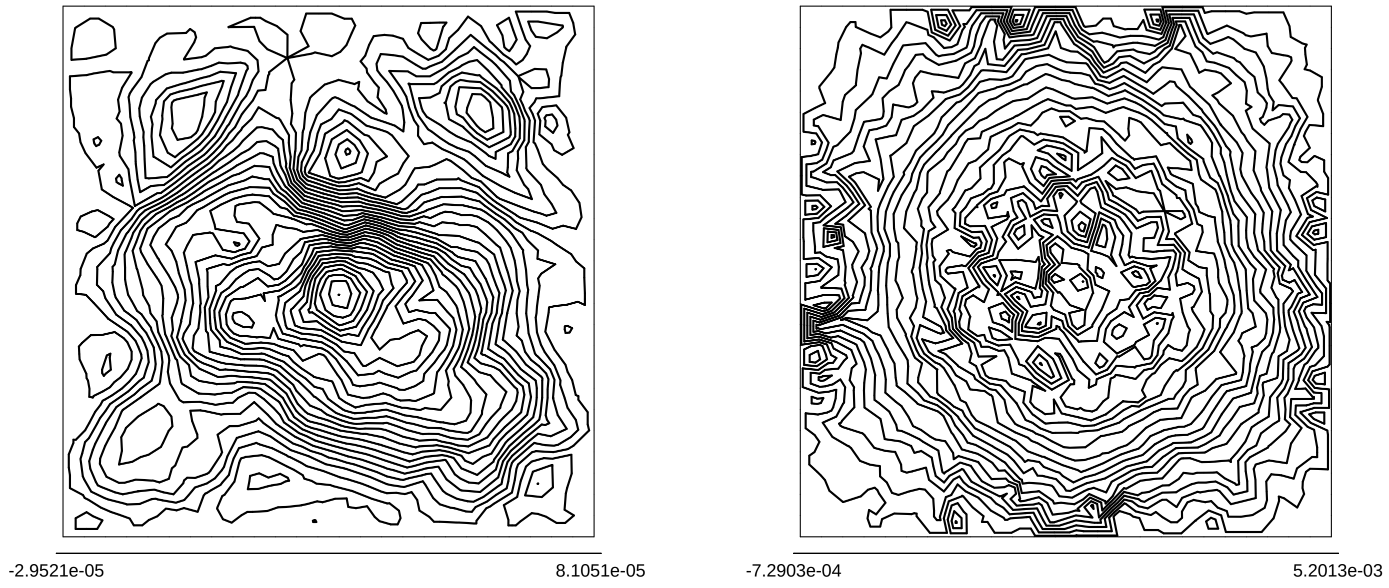


Fig. A.1 – Erreur intérieure courant

Erreur bord courant

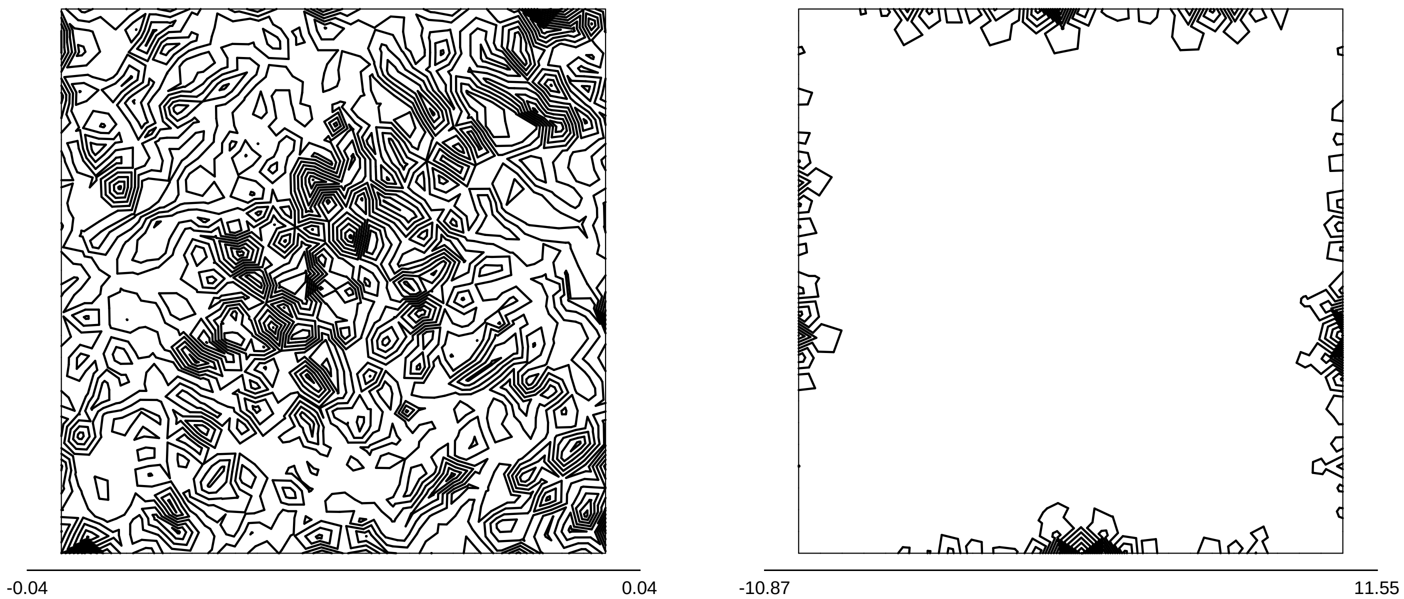


Fig. A.2 – Erreur intérieure tourbillon

Erreur bord tourbillon

On peut évidemment faire la même décomposition sur les inconnues de la formulation tourbillon-vitesse-pression. On note $\Pi^{\text{div}}_{\mathcal{T}}$ l'interpolée $H(\text{div})$ défini au chapitre 2 (définition (2.1.7)) et $\Pi^0_{\mathcal{T}}$ l'interpolée constante par triangle.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ p_{\mathcal{T}} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{solution}\\ \text{du problème}\\ \text{discret}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega \\ \Pi^{\text{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u} \\ \Pi^0_{\mathcal{T}}p \end{pmatrix}}_{\substack{\text{interpolée}\\ \text{de la solution}\\ \text{exacte}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^i_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{u}^i_{\mathcal{T}} \\ p^i_{\mathcal{T}} \end{pmatrix}}_{\text{erreur intérieure}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^b_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{u}^b_{\mathcal{T}} \\ p^b_{\mathcal{T}} \end{pmatrix}}_{\text{erreur au bord}}$$

où $(\omega^i_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}^i_{\mathcal{T}}, p^i_{\mathcal{T}}) \in W_{\mathcal{T}} = H^1_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{T}} \times Y_{\mathcal{T}}$ sont tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\omega^i_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{u}^i_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & 0 \quad \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega^i_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \nu(\text{div}\ \mathbf{u}^i_{\mathcal{T}}, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (p^i_{\mathcal{T}}, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & (\mathbf{f} - \nu\ \mathbf{rot}\ \Pi^1_{\mathcal{T}}\omega, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (\Pi^0_{\mathcal{T}}p, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \\ & & \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\text{div}\ \mathbf{u}^i_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) & = & 0 \quad \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}, \end{array}\right.$$

et $(\omega^b_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}^b_{\mathcal{T}}, p^b_{\mathcal{T}}) \in W_{\mathcal{T}} = H^1_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{T}} \times Y_{\mathcal{T}}$ sont tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\omega^b_{\mathcal{T}}, \varphi_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{u}^b_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) & = & -(\Pi^1_{\mathcal{T}}\omega, \varphi_{\mathcal{T}}) + (\Pi^{\text{div}}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}^b_{\mathcal{T}}, \mathbf{rot}\ \varphi_{\mathcal{T}}) \\ & & \forall\ \varphi_{\mathcal{T}} \in W_{\mathcal{T}} \\ \nu(\mathbf{rot}\ \omega^b_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \nu(\text{div}\ \mathbf{u}^b_{\mathcal{T}}, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - (p^b_{\mathcal{T}}, \text{div}\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) & = & 0 \quad \forall\ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\text{div}\ \mathbf{u}^b_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) & = & 0 \quad \forall\ q_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}. \end{array}\right.$$

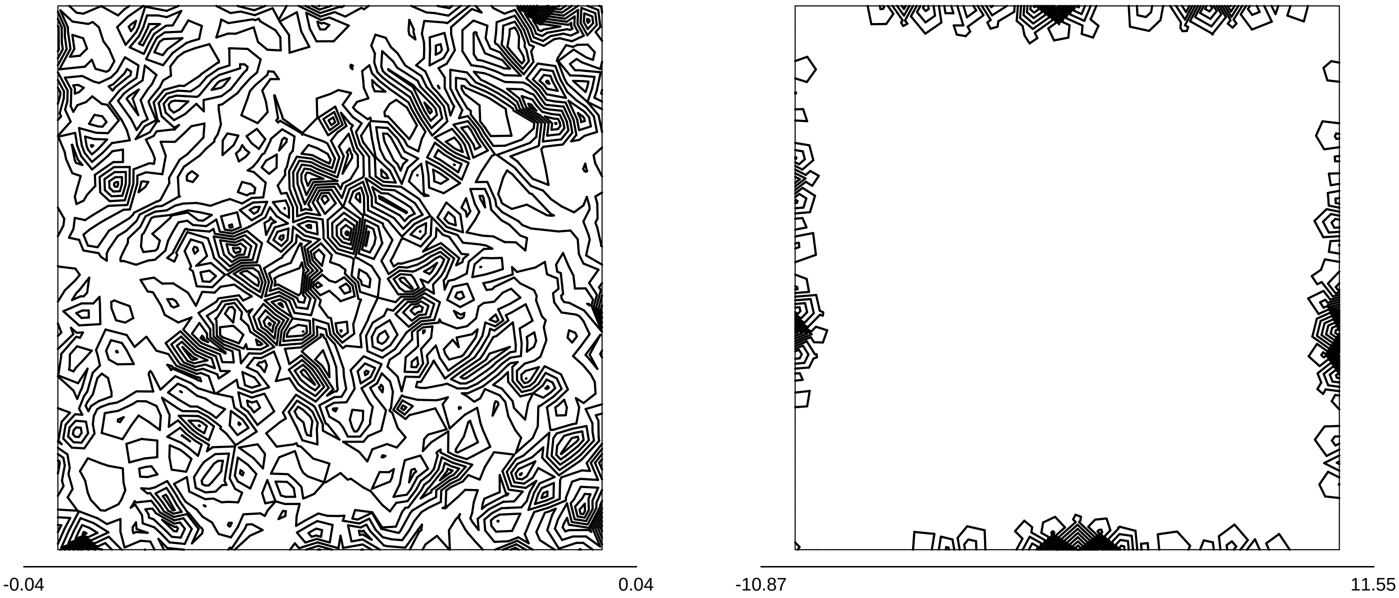
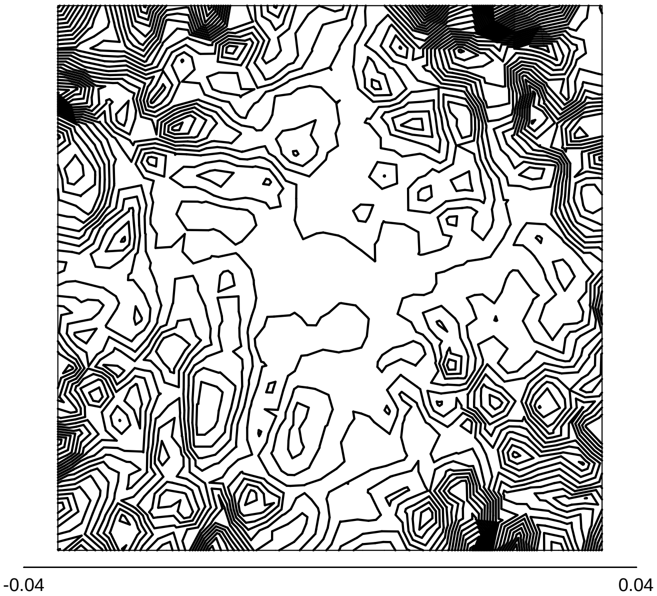


Fig. A.3 – Erreur intérieure tourbillon — Erreur bord tourbillon

Remarque A.0.4 *Les planches A.2 et A.3 confirment que l'erreur totale sur le tourbillon (dans la formulation fonction courant-tourbillon comme dans la formulation tourbillon-vitesse-pression)*



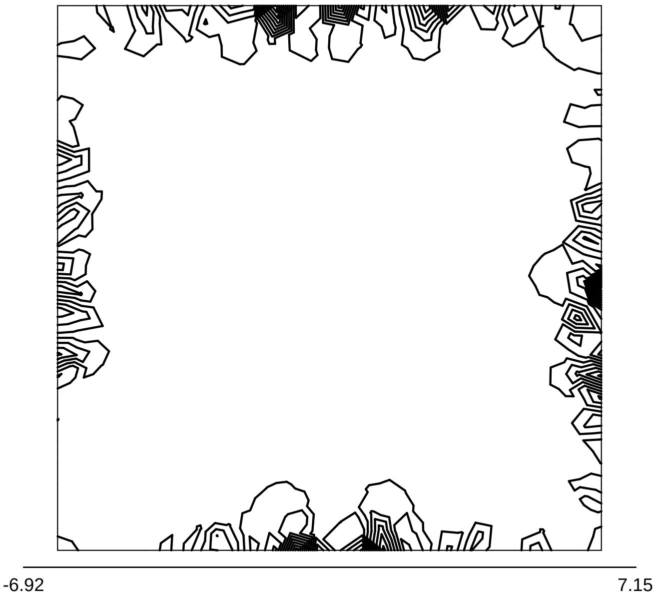


Fig. A.4 – Erreur intérieure pression Erreur bord pression

est essentiellement une erreur de bord. L'erreur au bord est de valeur jusqu'à 300 *fois plus importante que l'erreur intérieure. La planche A.4 présente les erreurs intérieures et au bord sur la pression.*

La même étude sur les versions stabilisées du chapitre 4 montrent que l'erreur au bord en tourbillon a diminué d'un facteur 70 environ, ce qui confirme la validité de cette approche (planche A.5 et A.6).

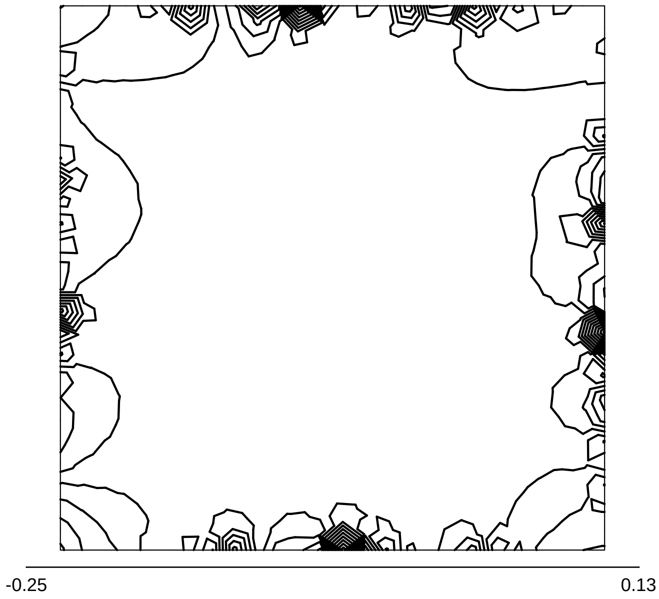


Fig. A.5 – Erreur bord tourbillon $(\omega, \mathbf{u}, p)$ stabilisé

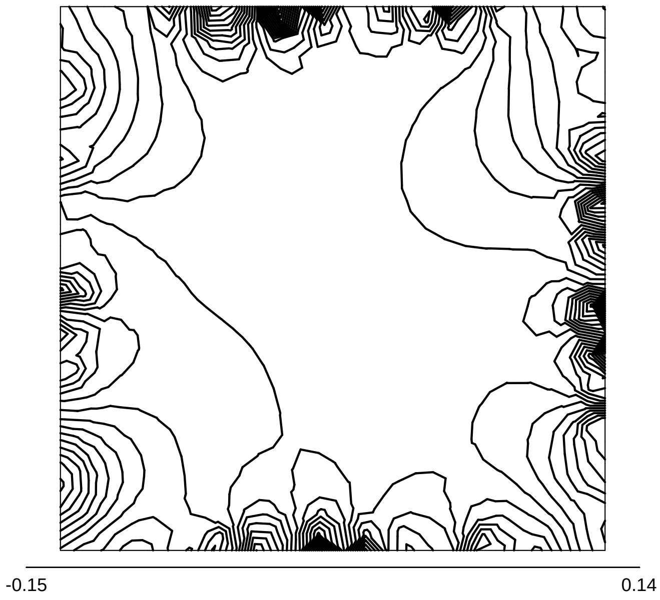


Fig. A.6 – Erreur bord pression $(\omega, \mathbf{u}, p)$ stabilisé

Bibliographie

[ABD99] M. Amara, H. Barucq, and M. Duloué. Une formulation mixte convergente pour le système de Stokes tridimensionnel. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328 :935–938, 1999.

[ABDG98] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9) :823–864, 1998.

[Ada75] R.A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[ADN64] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions in elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 17 :–, 1964.

[AGP92] Y. Achdou, R. Glowinski, and O. Pironneau. Tuning the mesh of a mixed method for the stream function - vorticity formulation of the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 63 :145–163, 1992.

[Ara66] A. Arakawa. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion. *J. of Computational Physics*, 1 :119–143, 1966.

[Bab71] I. Babuška. Error bounds for finite element method. *Numer. Math.*, 16 :322–333, 1971.

[BE79] M. Bercovier and M. Engelman. A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows. *J. of Comp. Physics*, 30 :181–201, 1979.

[Ben84] A. Bendali. *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques.* PhD thesis, Université Paris VI, 1984.

[BGH+88] M. Bernadou, P.L. George, A. Hassim, P. Joly, P. Laug, B. Muller, A. Perronnet, E. Saltel, D. Steer, G. Vanderborck, and M. Vidrascu. *MODULEF : Une bibliothèque modulaire d'éléments finis.* INRIA, 1988.

[BGM92] C. Bernardi, V. Girault, and Y. Maday. Mixed spectral element approximation of the Navier-Stokes equations in stream function and vorticity formulation. *IMA Journal Numer. Anal.*, 12 :565–608, 1992.

[Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multiplyers. *R.A.I.R.O. R2*, pages 129–151, 1974.

[CB68] Y. Choquet-Bruhat. *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs.* Dunod, 1968. Paris.

[CDL] Computational, Dynamics, and Ltd.

[Cia87] P.G. Ciarlet. *The finite element methods for elliptic problems.* North-Holland, 1987. Amsterdam.

[CR72] P. Ciarlet and P.A. Raviart. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 46 :177–199, 1972.

[CR74] P. Ciarlet and P.A. Raviart. A mixed finite element method for the biharmonic equation. *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, pages 125–145, 1974.

[DD86] F. Dubois and J.M. DUPUY. A three dimensional vector potential formulation for solving transonic flow with mixed finite elements. In 6^{th} *International Symposium : Finite elements methods in flow problems*, Antibes, 1986.

[DP86] F. El Dabaghi and O. Pironneau. Vecteurs de courant et fluides parfaits en aérodynamique numérique tridimensionnelle. *Numerische Mathematik*, 48 :561–589, 1986.

[DSS97a] F. Dubois, M. Salaün, and S. Salmon. Aspects numériques d'une formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de Stokes. Technical Report 297/97, IAT/CNAM, 1997.

[DSS97b] F. Dubois, M. Salaün, and S. Salmon. Aspects numériques de la formulation tourbillon-vitesse-pression. In *Actes du* $29^{\text{ème}}$ *congrès d'Analyse Numérique*, pages 335–336, Larnas, Ardèche, du 26 au 30 Mai 1997. Canum'97.

[DSS98] F. Dubois, M. Salaün, and S. Salmon. Méthode MAC en triangles et formulation fonction courant-tourbillon pour le problème de Stokes. In *Actes du* $30^{\text{ème}}$ *congrès d'Analyse Numérique*, page 278, Arles, du 18 au 22 Mai 1998. Canum'98.

[DSS00] F. Dubois, M. Salaün, and S. Salmon. A paraître. 2000.

[Dub91] F. Dubois. Une formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de Stokes. Technical Report ST/S 206, Aérospatiale Espace & Défense, 1991.

[Dub92] F. Dubois. Une formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de Stokes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 314 :277–280, 1992.

[Dub95] F. Dubois. Vorticity-velocity-pressure formulation for the Stokes problem. In *Ninth International Conference on Finite Elements in Fluids*, Venise (Italie), 1995.

[Dub99] F. Dubois. Vorticity-velocity-pressure formulation for the Stokes problem. Technical Report 321/99, IAT/CNAM, 1999.

[FFS] Fluent, France, and S.A.

[FT78] C. Foias and R. Temam. Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation. *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, 5 :29–63, 1978.

[Gir76] V. Girault. A combined finite element and Marker and Cell method for solving Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 26 :39–59, 1976.

[Gir96] V. Girault. Méthode d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes. Cours de DEA, 1996.

[GL96] V. Girault and H. Lopez. Finite element error estimates for the MAC scheme. *IMA Journal Numer. Anal.*, 16 :347–379, 1996.

[GP79] R. Glowinski and O. Pironneau. Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem. *SIAM*, 21(2) :167–211, 1979.

[GR86] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.

[Gri85] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1985.

[HHS83] R.P. Harper, C.W. Hirt, and J.M. Sicilian. Flow2d : a computer program for transient, two-dimensional flow analysis. *Flow Science Inc.*, (FSI-83-00-01), 1983.

[HW65] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.

[LL71] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*, volume VI of *Physique théorique*. Editions Mir, 1971.

[LM54] P. Lax and N. Milgram. Parabolic equations, in contributions to the theory of partial differential equations. In *Annals of mathematical studies*, 1954.

[LM68] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I.* Dunod, Paris, 1968.

[LT93] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Vol.*1 *et* 2. Masson, Paris, 1993.

[LU68] O.A. Ladyzhenskaya and N.N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, New York, 1968.

[Nic91] R.A. Nicolaides. Analysis and convergence of the MAC scheme. 1. The linear problem. ICASE Report 91-28, NASA, 1991.

[Pee61] J. Peetre. An other approach to elliptic boundary value problems. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 14 :711–731, 1961.

[Poi99] A. Poitou. Communication personnelle, Séminaire PPF Marie Farge ENS, Février 1999.

[PS72] S.W. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 :1787–1806, 1972.

[Rou84] F.X. Roux. Méthode d'éléments finis mixtes et hybrides. Séminaire du laboratoire d'analyse numérique de Paris VI, 1984.

[RT77] P.A. Raviart and J.M. Thomas. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. *Lectures Notes in Mathematics*, 306 :292–315, 1977.

[Rua95] V. Ruas. Approximating harmonic bases for a decoupled solution of viscous flow problems in $\psi - \omega$ formulation. *Z. Angew. Math. Mech.*, 75(5) :407–408, 1995.

[Sal96] S. Salmon. Développement de la méthode MAC en triangles. Rapport de stage de DEA, Université Paris VI, 1996.

[Sch78] R. Scholz. A mixed method for 4th order problems using linear finite elements. *R.A.I.R.O. Numerical Analysis*, 12(1) :85–90, 1978.

[Tar76] L. Tartar. Nonlinear partial differential equations using compactness method. *Technical Summary Report*, (1584), 1976. University of Wisconsin, Madison.

[Tho77] J.M. Thomas. *Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes*. PhD thesis, Université Paris VI, 1977.

[Tho80] J.M. Thomas. Méthode d'éléments finis mixtes et hybrides. Cours de DEA, 1980.

Table des figures